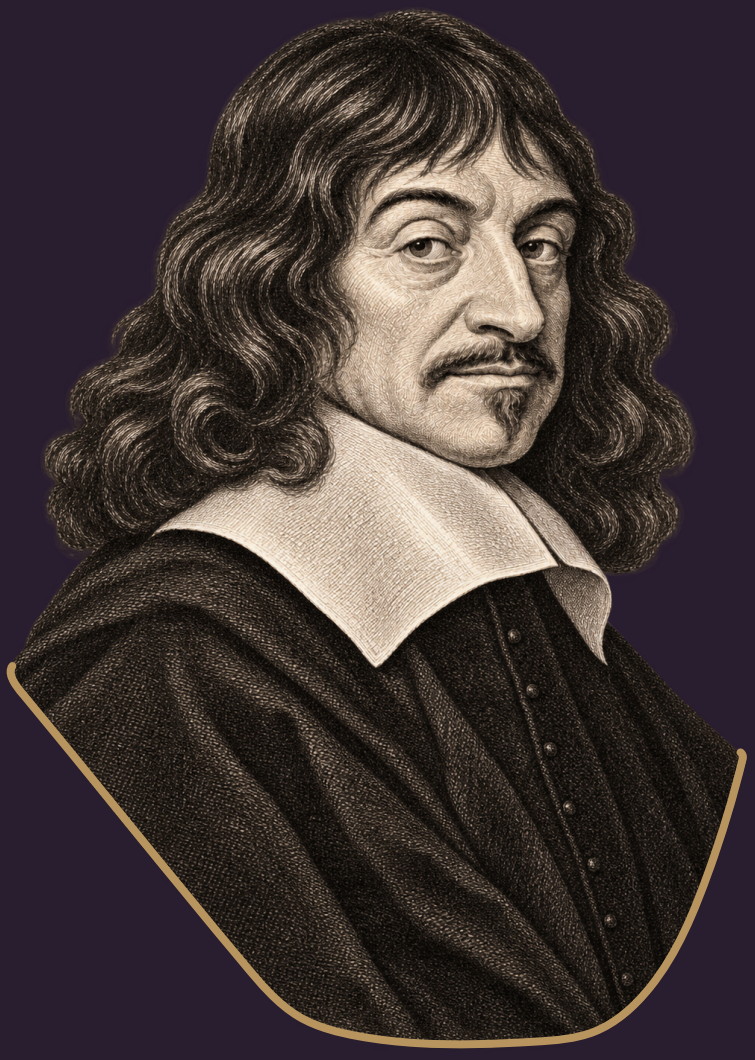
WALLACE SANTO

GEOMETRIA ANALÍTICA

um curso através de problemas

PRIMEIRA EDIÇÃO



WALLACE SANTO

GEOMETRIA ANALÍTICA

um curso através de problemas

Primeira edição
Novembro de 2026

Prefácio

Onde colocar a origem ao desenhar um triângulo isósceles? Se escolhermos o ponto médio da base e traçarmos um dos eixos ao longo dela, os extremos da base terão abscissas opostas. O terceiro vértice ficará sobre o outro eixo. Antes de atribuir medidas aos lados, já podemos reconhecer a simetria do triângulo pelas coordenadas de seus vértices.

Comecei o livro com uma revisão de álgebra. Escolhi os assuntos pelo uso que terão na geometria: resolver um sistema permite encontrar os pontos comuns a duas curvas; completar quadrados ajuda a ler, na equação de uma circunferência, onde está o centro e quanto mede o raio.

Quem estuda geometria analítica pela primeira vez pode construir essa base desde o primeiro capítulo e seguir, a partir dela, até as cônicas. Para quem já conhece o assunto e quer ir além, procurei mostrar como uma ideia ganha alcance quando mudamos uma hipótese. Os pontos à mesma distância de dois pontos fixos e distintos formam uma mediatriz. Se trocarmos um dos pontos por uma reta que não passe pelo outro, a mesma pergunta nos leva à parábola.

Nos exercícios que encerram os capítulos de teoria, o leitor poderá experimentar os métodos que acabou de estudar. Nos dois últimos capítulos, reuni exercícios de vestibulares, de concursos militares e de olimpíadas, com suas resoluções. Às vezes, um exercício sobre circunferências começa a se esclarecer quando reconhecemos um triângulo ou traçamos uma perpendicular.

No triângulo do início, a simetria da figura nos ajudou a escolher os eixos antes de fazer qualquer conta. Em outros problemas, o caminho se inverte: é ao simplificar uma equação que descobrimos uma simetria que o desenho não deixava evidente. É essa relação entre a álgebra e a geometria que procuro desenvolver ao longo do livro.

Wallace Santo

Orientações de estudo

Para começar, basta saber operar com números reais, trabalhar com frações e resolver equações simples. Se este é o seu primeiro contato com a geometria analítica, vale fazer os exercícios do primeiro capítulo à medida que lê. A fatoração e os sistemas de equações voltarão a aparecer quando for preciso decidir, por exemplo, se duas curvas se cruzam e em quais pontos.

Ao estudar um exemplo, leia o enunciado e faça um esboço antes de acompanhar a resolução. Se um ponto P é a imagem de Q por reflexão numa reta, onde essa reta pode estar? Una os dois pontos e marque o ponto médio. Quando P e Q são distintos, o desenho ajuda a reconhecer a mediatriz; só então vale a pena procurar sua equação. Em outros problemas, um esboço pode sugerir que um ângulo é reto sem que o enunciado o garanta. Nesse caso, é preciso demonstrar a perpendicularidade antes de usá-la.

Nos exercícios, reserve tempo para a sua tentativa. Se ficar sem saber como prosseguir, procure na solução a primeira ideia que lhe faltou e volte ao problema a partir dela. Mesmo que sua resposta coincida com a do livro, compare os caminhos. Se você escreveu uma reta na forma reduzida, por exemplo, verifique se os dados também admitem uma reta vertical.

Quem já domina pontos, distâncias e retas pode retomar um assunto pelo índice remissivo ou experimentar os exercícios da coletânea, cujas resoluções estão no capítulo seguinte. O sinal + indica um complemento que pode ficar para outra leitura; o * assinala um desafio, inclusive sobre assuntos elementares. Quando houver uma solução alternativa com cálculo, a resolução por geometria analítica pode ser estudada por si só.

Sumário

Prefácio ..... **ii**
Orientações de estudo ..... **iii**
1 Álgebra e linguagem do plano **1**
1.1 Pares ordenados, eixos e escala 1
1.2 Identidades, fatoração e raízes 3
1.3 Equações e conjuntos de pontos 10
1.4 Simetrias e sinais das coordenadas 12
1.5 Módulo, regiões e fronteiras 15
1.6 Sistemas, equivalências e domínio 18
1.7 Um parâmetro que altera o conjunto + ... 22
1.8 Equações quadráticas: existência e relações das raízes 24
1.9 Exercícios 29
1.10 Soluções dos exercícios 32
2 Pontos, segmentos e áreas **42**
2.1 Distâncias no plano 42
2.2 O ponto médio de um segmento 46
2.3 Dividir um segmento numa razão dada 49
2.4 Escolher as coordenadas 54
2.5 Colinearidade e determinante de ordem dois 56
2.6 Área de triângulos e polígonos 59
2.7 Igualdade de distâncias e mediatriz 65
2.8 Baricentro e coordenadas baricêntricas + ... 70
2.9 Exercícios 76
2.10 Soluções dos exercícios 78
3 Retas e sistemas lineares **91**
3.1 Uma equação para uma reta 91
3.2 Variações, coeficiente angular e inclinação 94
3.3 Escolher uma representação 98
3.4 Um parâmetro para percorrer a reta 104
3.5 Interseção e paralelismo 107
3.6 Perpendicularidade sem excluir os eixos 112
3.7 Sistemas e casos excepcionais de um parâmetro 115
3.8 Feixes e concorrência + ... 118
3.9 Exercícios 123
3.10 Soluções dos exercícios 126
4 Distâncias, ângulos e reflexões **141**
4.1 O ponto mais próximo de uma reta 141
4.2 Paralelas e faixas 146
4.3 Como calcular a medida de um ângulo 149
4.4 O menor ângulo entre duas retas 152
4.5 Bissetrizes e igualdade de distâncias 157
4.6 Refletir um ponto numa reta 160
4.7 O menor percurso com uma parada 163
4.8 Distância orientada e escolha de uma região + ... 166
4.9 Exercícios 167
4.10 Soluções dos exercícios 169
5 Lugares geométricos e triângulos **182**

5.1 Condições, candidatos e recíproca ... 182
5.2 A imagem de um ponto móvel ... 185
5.3 Medianas e reconstrução de triângulos ... 189
5.4 Circuncentro: igual distância aos vértices ... 192
5.5 Ortocentro: concorrência das alturas ... 195
5.6 Incentro: distâncias aos lados e sinais ... 198
5.7 A reta de Euler + ... 205
5.8 Exercícios ... 210
5.9 Soluções dos exercícios ... 212
6 Circunferência ... 225
6.1 Distância fixa, circunferência e disco ... 225
6.2 Completar quadrados e verificar a existência ... 228
6.3 Um diâmetro ou três pontos conhecidos ... 232
6.4 Retas, interseções e cordas ... 238
6.5 Tangente em um ponto da circunferência ... 245
6.6 Tangentes que passam por um ponto dado ... 248
6.7 Distâncias máxima e mínima à curva ... 253
6.8 Percorrer a circunferência por um ângulo + ... 257
6.9 Uma razão fixa de distâncias + ... 259
6.10 Exercícios ... 264
6.11 Soluções dos exercícios ... 267
7 Configurações de circunferências ... 284
7.1 Posições relativas ... 284
7.2 A reta que contém a corda comum ... 288
7.3 Potência de um ponto ... 291
7.4 Secantes, cordas e tangentes ... 294
7.5 Eixo e centro radical + ... 298
7.6 Tangentes comuns + ... 303
7.7 Circunferências ortogonais + ... 306
7.8 Famílias com eixo radical comum + ... 308
7.9 Corda que une os pontos de tangência + ... 311
7.10 Exercícios ... 315
7.11 Soluções dos exercícios ... 318
8 Parábola ... 332
8.1 A condição focal e a escolha dos eixos ... 332
8.2 Outras posições: eixo vertical e translações ... 336
8.3 Interseção com reta: conferir o grau ... 340
8.4 Tangente num ponto, incluindo o vértice ... 344
8.5 Uma parametrização que percorre toda a curva + ... 349
8.6 Cordas e cordas que passam pelo foco + ... 351
8.7 Tangentes por um ponto dado + ... 355
8.8 Normais e reflexão + ... 358
8.9 Exercícios ... 363
8.10 Soluções dos exercícios ... 365
9 Elipse ... 381
9.1 Uma soma de distâncias ... 381
9.2 Escolher os eixos e deduzir a equação ... 382
9.3 Centro e direção do eixo maior ... 385
9.4 Reconstruir a curva a partir de seus elementos ... 388

9.5 Excentricidade e distâncias aos focos 390
9.6 Retas que atravessam ou não a elipse 392
9.7 A reta de apoio e a tangente 395
9.8 Extremos de uma expressão linear 402
9.9 Diretrizes e uma segunda descrição + ... 404
9.10 Uma parametrização que percorre toda a curva + ... 406
9.11 Exercícios 410
9.12 Soluções dos exercícios 412
10 Hipérbole 426
10.1 Uma diferença de distâncias e seus limites 426
10.2 Escolher os eixos e conservar os dois sinais 427
10.3 Eixo vertical, translação e reconstrução 432
10.4 Assíntotas e o sentido da aproximação 437
10.5 Retas: duas raízes, raiz dupla ou redução de grau 442
10.6 Tangente no ponto e tangentes por direção 446
10.7 Conjugada, equilátera e produto de coordenadas + ... 454
10.8 Foco e diretriz com excentricidade maior que um + ... 459
10.9 Uma parametrização e o ponto que ela omite + ... 461
10.10 Exercícios 464
10.11 Soluções dos exercícios 466
11 Métodos comuns às cônicas + ... 481
11.1 Escolher um parâmetro e procurar o ponto omitido 481
11.2 Duas expressões que conservam os fatores 486
11.3 Cordas por dois pontos 492
11.4 Ponto médio conhecido: equação e existência 496
11.5 Tangentes por um ponto: ponto de tangência real e grau 503
11.6 Construir a polar e encontrar seu polo 510
11.7 Diâmetros conjugados e centros 517
11.8 Normal, bissetriz e reflexão na elipse 524
11.9 Exercícios 528
11.10 Soluções dos exercícios 531
12 Mudanças de coordenadas e equação do segundo grau + ... 550
12.1 Mudar a origem sem mudar as direções 550
12.2 Girar os eixos mantendo o ponto 553
12.3 Eliminar o termo misto sem dividir por zero 557
12.4 Retirar os termos lineares por uma translação 561
12.5 Dois termos quadráticos não nulos 564
12.6 Uma única coordenada ao quadrado 569
12.7 Quando o grau diminui 572
12.8 O que o discriminante informa e o que ainda falta 574
12.9 Exercícios 577
12.10 Soluções dos exercícios 579
13 Estratégias e problemas integradores 592
13.1 Escolher eixos que conservem a configuração 592
13.2 Combinar equações antes de resolver 595
13.3 Transformar um percurso e provar que ele é permitido 599
13.4 Concorrência e condições que caracterizam uma configuração 601
13.5 Tangentes, áreas e duas curvas ao mesmo tempo 605
13.6 Provar a recíproca e comparar todos os candidatos 612

13.7 Exercícios 616
13.8 Soluções dos exercícios 618
14 Exercícios nacionais e internacionais 633
14.1 Distâncias, áreas e centros 633
14.2 Retas, ângulos e razões 635
14.3 Circunferências, tangências e lugares 636
14.4 Parábolas e elipses 638
14.5 Mínimos e movimentos 639
14.6 Desafios de concursos: incidências e construções 640
15 Resoluções da coletânea 642
15.1 Distâncias, áreas e centros 642
15.2 Retas, ângulos e razões 648
15.3 Circunferências, tangências e lugares 654
15.4 Parábolas e elipses 663
15.5 Mínimos e movimentos 669
15.6 Desafios de concursos: incidências e construções 675
Apêndice A. Coordenadas polares 691
Da distância e do ângulo ao ponto 691
Uma reta e uma circunferência 692
Ler a condição foco–diretriz 693
Referências bibliográficas 695
Índice remissivo 696

Capítulo 1

Álgebra e linguagem do plano

Marque um ponto no encontro de duas linhas de uma folha quadriculada. Como indicar sua posição a quem tem uma folha igual? Se vocês combinarem de qual cruzamento partir, basta dizer quantos quadradinhos percorrer para a direita ou para a esquerda e quantos para cima ou para baixo. Assim, um par de números identifica o ponto. Quando impomos uma condição a esses números, surge outra pergunta. Que figura formam os pontos que a satisfazem? Para responder, retomaremos a álgebra de que vamos precisar, da fatoração à resolução de sistemas.

1.1 Pares ordenados, eixos e escala

Escolhemos dois **eixos coordenados** perpendiculares: o das abscissas (x), horizontal, e o das ordenadas (y), vertical. Eles se cruzam na **origem** O. Fixamos uma unidade de comprimento. No eixo x, o sentido positivo é para a direita; no eixo y, para cima.

Os eixos dividem o plano em quatro regiões, os **quadrantes**. O primeiro fica acima do eixo x e à direita do eixo y. A partir dele, numeramos os quadrantes no sentido anti-horário: I, II, III e IV.

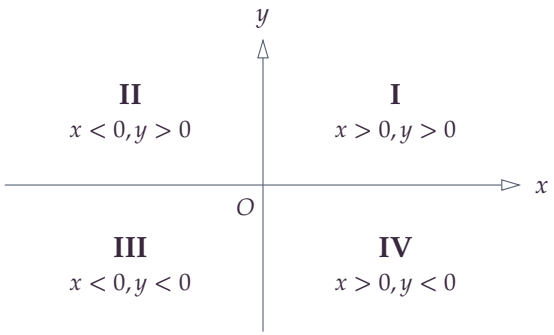


Figura 1.1: Os sinais de x e de y em cada quadrante. Os pontos sobre os eixos não pertencem a nenhum quadrante.

O par ordenado (x, y) indica primeiro o deslocamento horizontal e depois o vertical a partir da origem. Por exemplo, para marcar $P = (3, -2)$, partimos de O, andamos três unidades para a direita e duas para baixo. Chegamos ao quarto quadrante. A palavra **ordenado** registra que trocar as coordenadas pode mudar o ponto: $(-2, 3)$ fica no segundo quadrante. Dois pares são iguais exatamente quando as primeiras coordenadas são iguais entre si e as segundas também.

Na origem, as duas coordenadas são zero: $O = (0, 0)$. Os pontos do eixo horizontal são da forma $(x, 0)$; os do vertical, da forma $(0, y)$.

Exemplo 1.1. *Coordenadas fracionárias e sinais*

Localize $P = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $Q = (2, -1)$, $R = (0, 3)$ e $S = (-2, 0)$ e identifique a posição de cada ponto em relação aos eixos.

Resolução.
Para P, partimos de O, percorremos uma unidade e meia para a esquerda e duas para cima. Como sua abscissa é negativa e sua ordenada é positiva, ele pertence ao segundo quadrante. O ponto Q fica duas unidades à direita e uma para baixo, no quarto quadrante. O ponto R está no eixo vertical, três unidades acima de O; S está no eixo horizontal, duas unidades à esquerda. Nenhum desses dois últimos pontos pertence a um quadrante.

A fração $-\frac{3}{2}$ é uma coordenada exata. Não precisamos arredondá-la nem substituí-la por uma marca inteira para localizar P.

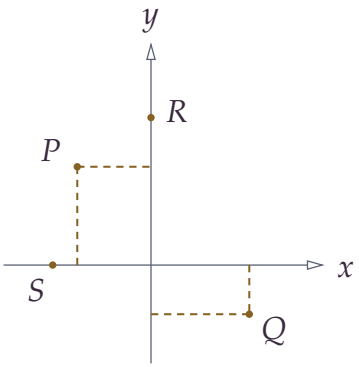


Figura 1.2: As projeções de P e Q mostram a ordem das coordenadas. R e S estão nos eixos, fora dos quadrantes.

A escala diz quanto uma unidade do desenho representa. Se um centímetro representa duas unidades, a coordenada 3 será marcada a um centímetro e meio da origem. Neste livro, os gráficos métricos usam a mesma unidade nos dois eixos. Com escalas físicas diferentes, um desenho ainda pode registrar coordenadas, mas seus comprimentos e ângulos aparentes ficam deformados. Antes de medir no papel, é preciso conhecer a escala e saber se o desenho é métrico ou esquemático.

Exemplo 1.2. *Pertencer a um eixo ou estar na origem*

Um ponto tem coordenadas $P = (a - 2, a + 1)$, com a real. Para quais valores de a ele pertence a cada eixo? Existe algum valor que o coloque na origem?

Resolução.
No eixo horizontal, a ordenada é zero, como na Figura 1.3. Portanto, $a + 1 = 0$, dando $a = -1$ e $P = (-3, 0)$. No eixo vertical, precisamos de $a - 2 = 0$, dando $a = 2$ e $P = (0, 3)$. A substituição confirma cada uma dessas posições.

A origem exige as duas coordenadas nulas simultaneamente. Isso obrigaria o mesmo número a a ser 2 e -1, o que é impossível. Poder alcançar cada eixo em escolhas diferentes não significa poder ocupar a origem.

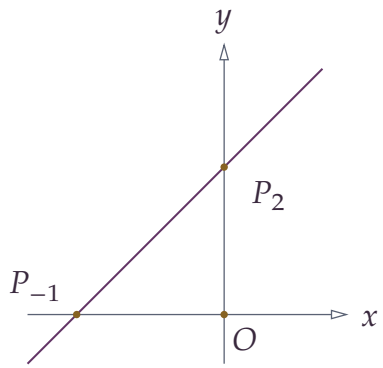


Figura 1.3: A reta $y = x + 3$ contém todas as posições de P. Seus pontos de interseção com os eixos são $(-3, 0)$ e $(0, 3)$; a origem não pertence a ela.

1.2 Identidades, fatoração e raízes

Uma identidade algébrica é uma igualdade válida para todos os valores admitidos das letras. Ela permite trocar uma expressão por outra com o mesmo valor, escolhendo a forma mais útil para o problema. Usaremos a distributividade das operações reais para fundamentar as identidades seguintes. As figuras de áreas ilustram escolhas de medidas positivas; as demonstrações algébricas, escritas ao lado dessa interpretação, abrangem também valores negativos e zero.

Propriedade 1.1. (Distributividade e fator comum). Para quaisquer reais a, b, c,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

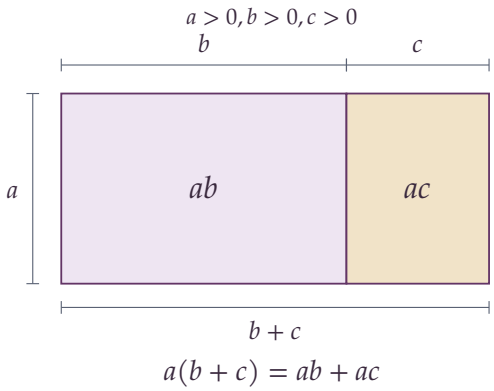


Figura 1.4: Para comprimentos positivos, a divisão do retângulo representa a distribuição do produto pela soma.

Tomamos a distributividade como uma propriedade fundamental das operações reais, válida independentemente dos sinais. Ela é o ponto de partida das demonstrações seguintes. Ler a igualdade da esquerda para a direita é desenvolver o produto; lê-la da direita para a esquerda é colocar a em evidência. Por exemplo, em $3x + 3y = 3(x + y)$, o mesmo fator multiplica as duas parcelas. A fatoração não altera o valor da expressão.

Proposição 1.2. (Quadrado da soma). *Para quaisquer reais a, b,*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Demonstração.
Para $a, b > 0$, divida cada lado do quadrado de lado $a+b$ em trechos de comprimentos a e b. Os cortes paralelos aos lados dão quatro peças.

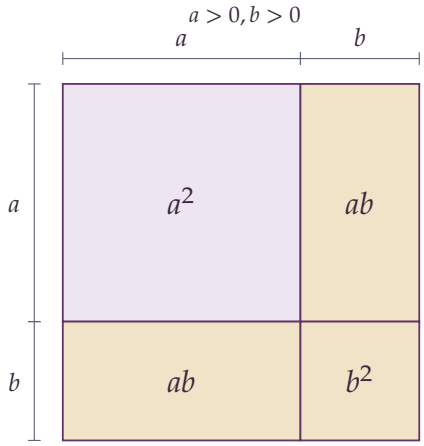


Figura 1.5: O quadrado de lado $a+b$, com $a, b > 0$, contém dois quadrados e dois retângulos de área ab.

Os dois retângulos de lados a, b explicam o termo $2ab$. Para quaisquer números reais, as mesmas quatro parcelas vêm da distributividade:

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Como $ab = ba$, obtemos a fórmula. □

O termo $2ab$ vem de dois produtos, e não pode ser omitido. Por exemplo, $(1+2)^2 = 9$, enquanto $1^2 + 2^2 = 5$.

Proposição 1.3. (Quadrado da diferença). *Para quaisquer reais a, b,*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Demonstração.
Para $a > b > 0$, retire do quadrado de lado a uma faixa horizontal e outra vertical, ambas de largura b.

Ao subtrair as duas áreas ab, descontamos duas vezes o canto comum.

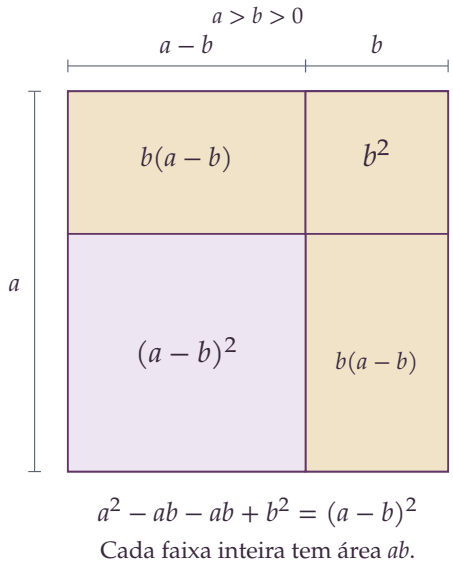


Figura 1.6: Com $a > b > 0$, retirar duas faixas do quadrado maior exige repor a região contada duas vezes.

Repor esse canto de área b^2 deixa exatamente o quadrado de lado $a - b$. Para quaisquer a, b reais, escreva $a - b = a + (-b)$. O quadrado da soma dá $(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. □

Assim, quadrado da diferença e diferença de quadrados são expressões distintas. Para esta última, usamos outra fatoração.

Proposição 1.4. (Diferença de quadrados). *Para quaisquer reais a, b,*

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Demonstração.
Para $a > b > 0$, retire de um canto do quadrado de lado a um quadrado de lado b. Separe o restante em dois retângulos, ambos com um lado de comprimento $a - b$.

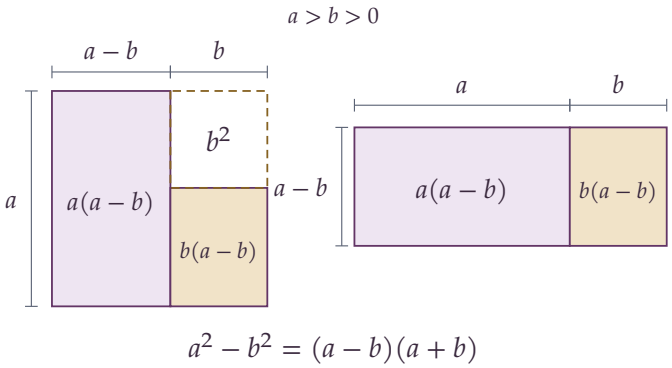


Figura 1.7: Para $a > b > 0$, a região restante pode ser reorganizada num retângulo de lados $a - b$ e $a + b$.

Ao encostar os lados de comprimento $a - b$, as outras dimensões, a e b, se somam. Isso explica os dois fatores. Para provar a identidade para todos os reais, desenvolva $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2$. Os termos mistos se cancelam porque $ab = ba$. □

Uma fatoração é especialmente útil numa equação cujo outro lado é zero. Um produto de dois reais é zero se, e somente se, pelo menos um fator é zero. Um dos sentidos é imediato pela multiplicação por zero. Para o outro, se $uv = 0$ e $u \neq 0$, dividir por u dá $v = 0$. A divisão só foi feita no caso em que o divisor não é nulo.

Usaremos o símbolo $\Leftrightarrow$ para ligar condições equivalentes: uma vale se, e somente se, a outra vale. O símbolo $\Rightarrow$ indica uma implicação, cujo sentido inverso pode não ser verdadeiro.

Exemplo 1.3. *Encontrar todas as raízes de uma equação*

Resolva, em números reais, $(x - 1)^2 = 9$.

Resolução.
A diferença de quadrados permite reunir a condição num produto nulo:

$$(x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0.$$

Logo, $x = 4$ ou $x = -2$. Reciprocamente, para esses valores, $x - 1$ vale 3 ou -3, cujo quadrado é 9. As duas possibilidades resolvem a equação, e o produto nulo mostra que não há outras.

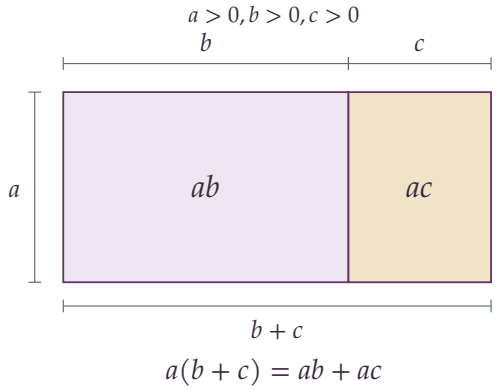
Exemplo 1.4. *Reconhecer um fator que é uma expressão*

Resolva $x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$ sem desenvolver todos os produtos.

Resolução.
A expressão $x - 3$ multiplica tanto x como 2. Podemos lê-la como o fator comum da distributividade, ilustrada na Figura 1.8:

$$x(x - 3) + 2(x - 3) = (x + 2)(x - 3).$$

No diagrama de áreas, o lado comum cumpre o papel do fator $x - 3$.



$$a(b + c) = ab + ac$$

Figura 1.8: Para comprimentos positivos, a divisão do retângulo representa a distribuição do produto pela soma. O diagrama de áreas usa medidas positivas para ilustrar a distributividade. Nesta resolução, o fator comum é $x - 3$; a identidade algébrica permanece válida quando essa expressão é negativa ou zero.

A equação equivale, portanto, a $(x+2)(x-3)=0$, cujas soluções são $x=-2$ e $x=3$. Para -2, os dois termos originais valem 10 e -10; para 3, ambos valem zero. Os dois valores satisfazem a equação, e o produto nulo exclui outras possibilidades.

Colocar uma expressão em evidência não exige que ela seja não nula. Por isso, a fatoração conservou também a solução que anula $x-3$.

Também podemos procurar um quadrado dentro de uma expressão. O termo $2hx$ sugere o desenvolvimento de $(x+h)^2$; para conservá-lo sem alterar o valor total, é preciso compensar h^2.

Proposição 1.5. (Completar um quadrado). *Para quaisquer reais x, h, k,*

$$x^2 + 2hx + k = (x+h)^2 + k - h^2.$$

Demonstração.
Com $x, h > 0$, as parcelas x^2 e $2hx$ formam um quadrado de lado x e duas faixas de largura h.
O pequeno quadrado que falta no canto mostra qual parcela acrescentar.

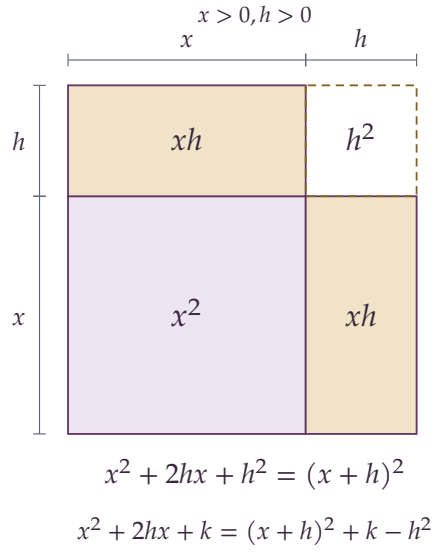


Figura 1.9: Com $x, h > 0$, as duas faixas de área hx deixam um canto de área h^2 para completar o quadrado.

Para quaisquer reais x, h, k, podemos somar e subtrair h^2 na expressão original:

$$x^2 + 2hx + k = \left(x^2 + 2hx + h^2\right) + k - h^2 = (x+h)^2 + k - h^2.$$

A parcela $-h^2$ compensa exatamente a que completou o quadrado. □

Em uma expressão $x^2 + bx + k$, escolhemos $h = \frac{b}{2}$, pois $2h = b$.

Exemplo 1.5. *Um menor valor obtido por um quadrado*

Determine o menor valor de $x^2 - 6x + 11$, quando x percorre os números reais.

Resolução.
Queremos tornar visível uma parcela não negativa. No desenvolvimento de $(x+h)^2$, o termo do meio é $2hx$. Para obter $-6x$, precisamos de $h = -3$. Como o quadrado já contém 9, escrevemos

$$x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 11 - 9 = (x-3)^2 + 2.$$

O quadrado é sempre não negativo; portanto, a expressão é pelo menos 2. Para $x = 3$, ele se anula e a expressão vale 2. Logo, o menor valor é 2, atingido somente em $x = 3$.

Exemplo 1.6. *Decidir a existência antes de procurar raízes*

A equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ tem alguma solução real?

Resolução.
Completamos o quadrado para evidenciar o mínimo mostrado na Figura 1.10:

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2.$$

Para todo real x, o lado direito é pelo menos 2; logo, não pode ser zero. A equação não tem solução real. Não encontrar raízes por tentativas seria inconclusivo; a desigualdade impede todas elas de uma só vez.

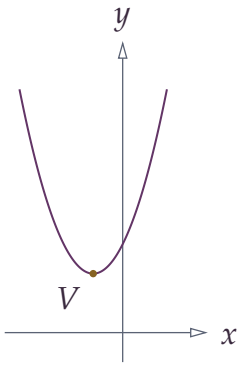


Figura 1.10: O gráfico de $y = (x+1)^2 + 2$ tem mínimo 2 em $V = (-1, 2)$ e não encontra o eixo x.

Para $r \geqslant 0$, o símbolo $\sqrt{r}$ designa a raiz quadrada **não negativa** de r. Assim, $\sqrt{9} = 3$; a equação $t^2 = 9$, por outro lado, admite $t = 3$ e $t = -3$. A notação da raiz escolhe um número, enquanto a equação pede todas as soluções.

O **módulo** de um real t, escrito $|t|$, é sua distância a zero na reta numérica. Se $t \geqslant 0$, temos $|t| = t$; se $t < 0$, temos $|t| = -t$. Em ambos os casos, o módulo é não negativo. Em particular, $|-3| = 3$ e $|0| = 0$.

Proposição 1.6. (Raiz de um quadrado e módulo). *Para todo real t,*

$$\sqrt{t^2} = |t|.$$

Demonstração.
Dois números opostos têm o mesmo quadrado. Sua raiz quadrada é, por definição, o número não negativo que tem esse quadrado.
Na reta numérica, compare as distâncias de -3 e 3 à origem.

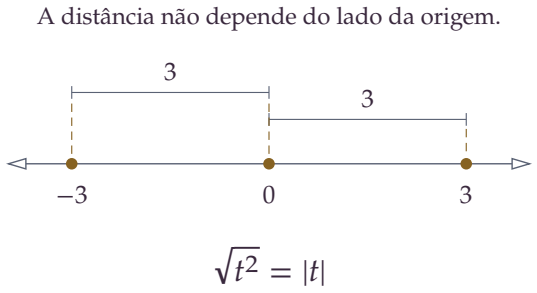


Figura 1.11: Os números -3 e 3 têm o mesmo quadrado e a mesma distância a zero. A raiz não negativa é 3.

Se $t \geqslant 0$, essa distância é t, a raiz não negativa de t^2. Se $t < 0$, a distância é $-t$, que é positivo e satisfaz $(-t)^2 = t^2$. Logo, nos dois casos a raiz é $|t|$, inclusive quando $t = 0$. □

Escrever $\sqrt{t^2} = t$ sem uma hipótese de sinal descartaria o segundo caso.

Exemplo 1.7. *Uma raiz cuja expressão muda de sinal*

Simplifique $\sqrt{(2t-1)^2}$ para todos os valores reais de t.

Resolução.
Aplicamos a identidade da raiz quadrada de um quadrado à expressão inteira $2t - 1$.
Obtemos $|2t - 1|$, cujo valor depende do sinal dessa expressão.
Na reta numérica, o módulo mede a distância até a origem.

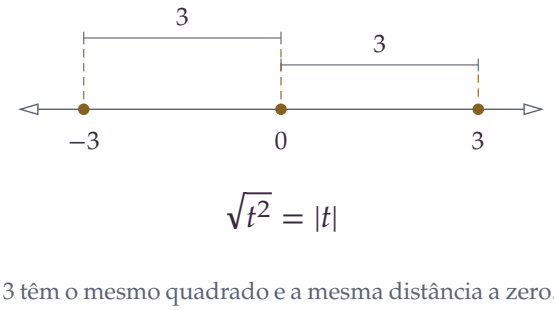


Figura 1.12: Os números -3 e 3 têm o mesmo quadrado e a mesma distância a zero. A raiz não negativa é 3. Nesta aplicação, a coordenada real representada no esquema é a expressão inteira $2t - 1$. Seu sinal muda em $t = \frac{1}{2}$.

Se $t \geqslant \frac{1}{2}$, então $2t - 1 \geqslant 0$, e a raiz vale $2t - 1$. Se $t < \frac{1}{2}$, então $2t - 1 < 0$, e a raiz vale $-(2t - 1) = 1 - 2t$. Os casos cobrem todos os reais, com o valor zero incluído

no primeiro. Em particular, para $t = 0$, a raiz vale 1; suprimi-la e conservar $2t - 1$ produziria indevidamente -1.

1.3 Equações e conjuntos de pontos

Uma igualdade pode ser verdadeira ou falsa depois que os valores são fixados: $2 + 3 = 5$ é verdadeira, e $2 + 3 = 6$ é falsa. Uma **equação** pede os valores desconhecidos que tornam verdadeira uma igualdade. Seu **conjunto solução** depende do universo em que procuramos esses valores. Escreveremos $\mathbb{R}$ para o conjunto dos números reais. Na equação $x + 2 = 5$ em $\mathbb{R}$, procuramos números reais, e a única solução é $x = 3$.

O símbolo $\mathbb{R}^2$ designa o conjunto de todos os pares ordenados de reais. Interpretar uma equação como condição sobre $P = (x, y)$ significa procurar todos os pontos cujas coordenadas a satisfazem. Se a condição só menciona x, a coordenada y continua livre. Essa liberdade altera o conjunto solução.

Exemplo 1.8. *Uma equação em duas leituras*

Compare os conjuntos definidos por $x = -1$ e por $x^2 = 4$, primeiro em $\mathbb{R}$ e depois como condições sobre (x, y) em $\mathbb{R}^2$.

Resolução.
Em $\mathbb{R}$, a primeira equação tem somente a solução -1. No plano, ela exige abscissa -1, mas admite qualquer ordenada: os pontos são $(-1, y)$, com y real. Eles formam a reta vertical que passa por $(-1, 0)$.

Para a segunda equação, a fatoração $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ dá $x = 2$ ou $x = -2$. Em $\mathbb{R}$, são dois números. No plano, cada um pode ser acompanhado por qualquer y: o conjunto reúne duas retas verticais, $x = 2$ e $x = -2$. A condição $x = 2$ seleciona apenas uma dessas retas e não é equivalente a $x^2 = 4$.

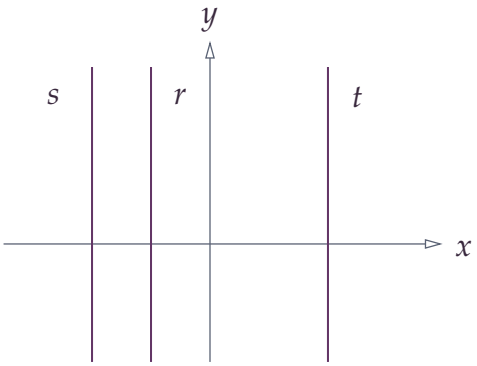


Figura 1.13: No plano, $x = -1$ determina a reta r. A condição $x^2 = 4$ reúne as retas s e t, pois suas ordenadas são livres.

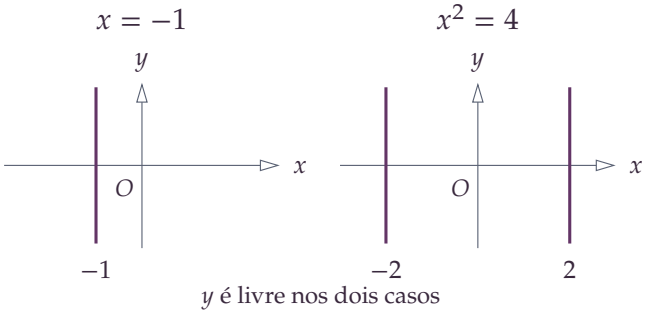


Figura 1.14: Uma abscissa fixa descreve uma reta vertical; duas abscissas possíveis descrevem duas retas.

Exemplo 1.9. *Testar e descrever uma condição*

Quais dos pontos $A = (1,2)$, $B = (3,0)$ e $C = (2,2)$ satisfazem $x + y = 3$? Como descrever todos os pontos que satisfazem essa condição?

Resolução.
Substituímos as duas coordenadas de cada ponto: para A, $1 + 2 = 3$; para B, $3 + 0 = 3$; para C, $2 + 2 = 4$. Portanto, A e B pertencem ao conjunto, e C não pertence.
A reta passa por A e B e deixa C fora.

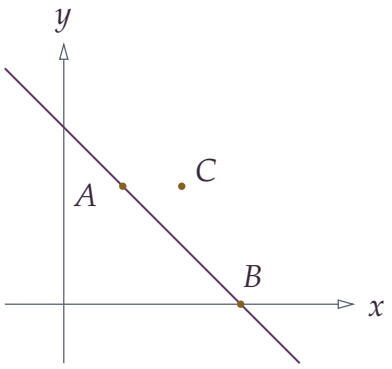


Figura 1.15: A reta $x + y = 3$ contém $A = (1,2)$ e $B = (3,0)$, mas não contém $C = (2,2)$.

Para obter todos os pontos, podemos escolher livremente uma abscissa real t. A equação determina então $y = 3 - t$. Assim, todos os pontos são $(t, 3 - t)$, com t real.

Reciprocamente, as coordenadas de qualquer par dessa forma somam 3. A letra t apenas permite percorrer escolhas; essa descrição não pressupõe uma teoria de funções.

Uma notação possível para o conjunto anterior é

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}.$$

Lemos: o conjunto dos pares reais (x,y) tais que $x + y = 3$. O sinal de dois-pontos introduz a condição. Dizer que P pertence a S significa que suas coordenadas a satisfazem.

Uma condição também pode selecionar todo o plano ou nenhum ponto. A igualdade $0 = 0$ é verdadeira para todo par; $0 = 1$ é falsa para todos eles. Já $x^2 + y^2 = 0$ seleciona apenas $(0,0)$: os quadrados são não negativos, logo sua soma só é zero quando ambos

são zero. A forma de uma equação, sozinha, não autoriza chamar seu conjunto de reta ou de região.

Exemplo 1.10. *Pontos de teste e igualdade de conjuntos*

Os pontos $(0,2)$, $(1,1)$ e $(2,0)$ satisfazem as duas condições

$$x+y=2 \quad \text{e} \quad (x+y-2)(x-y)=0.$$

Isso prova que elas definem o mesmo conjunto?

Resolução.
Não. Todo ponto da primeira condição satisfaz a segunda, pois anula o fator $x+y-2$. Mas o produto também se anula quando $x-y=0$, mesmo que o primeiro fator seja diferente de zero. A origem é um contraexemplo: nela, o produto é zero, enquanto $x+y=0$, e não 2.

A segunda condição reúne os pontos com $x+y=2$ e os pontos com $x=y$. Reciprocamente, cada ponto de qualquer um desses conjuntos anula um dos fatores. Assim, a descrição é completa. Os testes iniciais confirmavam pertencimentos; não demonstravam que todos os pontos de uma condição pertenciam à outra.

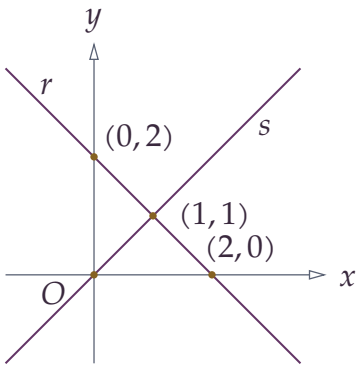
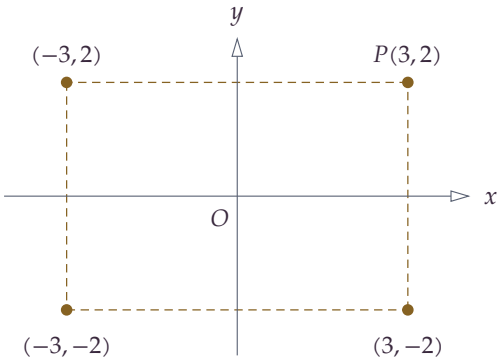


Figura 1.16: O produto se anula nas retas $r : x+y=2$ e $s : x=y$. A origem pertence somente à segunda, distinguindo os conjuntos.

1.4 Simetrias e sinais das coordenadas

Refletir um ponto no eixo horizontal conserva sua posição horizontal e troca o lado em que ele fica em relação a esse eixo, mantendo a distância vertical. Assim, (x,y) passa a $(x,-y)$. A reflexão no eixo vertical conserva a ordenada e troca a abscissa: (x,y) passa a $(-x,y)$. A simetria em relação à origem troca os dois sinais: (x,y) passa a $(-x,-y)$. Nesse último caso, a origem fica no meio das duas posições em cada eixo.



$$(x, y) \to (-x, y), (x, -y), (-x, -y)$$

Figura 1.17: As reflexões nos eixos trocam um sinal; a simetria central troca os dois.

Essas regras incluem os pontos dos eixos. Se $y = 0$, trocar y por $-y$ não altera o ponto; por isso, os pontos fixos da reflexão no eixo horizontal são exatamente os pontos desse eixo. Analogamente, a reflexão no eixo vertical fixa os pontos de abscissa zero. A simetria na origem fixa somente $(0, 0)$, pois $x = -x$ e $y = -y$ implicam $x = y = 0$.

Exemplo 1.11. *Refletir e identificar os pontos fixos*

Determine as imagens de $P = (3, 2)$ nas reflexões nos eixos e na simetria em relação à origem. Quais pontos do plano permanecem inalterados ao refletirmos primeiro no eixo horizontal e depois no vertical?

Resolução.
A reflexão no eixo horizontal conserva a abscissa e inverte a ordenada, dando $(3, -2)$. No eixo vertical, só a abscissa muda de sinal, e obtemos $(-3, 2)$. Na simetria em relação à origem, os dois sinais mudam, dando $(-3, -2)$.

Para um ponto qualquer (x, y), as duas reflexões sucessivas produzem $(x, -y)$ e depois $(-x, -y)$. O ponto só volta à posição inicial se $(-x, -y) = (x, y)$. A igualdade dos pares exige $2x = 0$ e $2y = 0$, portanto $x = y = 0$. A origem de fato permanece fixa nas duas reflexões e é a única possibilidade.

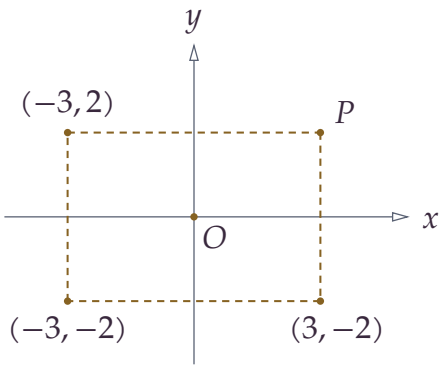


Figura 1.18: As quatro posições formam um retângulo centrado em O. Duas reflexões sucessivas levam P ao vértice oposto.

Exemplo 1.12. *Um conjunto conservado sem pontos fixos*

A reflexão no eixo vertical conserva o conjunto S definido por $x^2 = 4$? Algum ponto de S fica parado nessa reflexão?

Resolução.
O conjunto reúne as duas retas da Figura 1.19. A reflexão leva $(2, y)$ a $(-2, y)$ e leva $(-2, y)$ a $(2, y)$, para toda ordenada real y. Ela troca as duas retas, de modo que a imagem do conjunto é o próprio S.
Os dois pontos marcados têm a mesma ordenada.

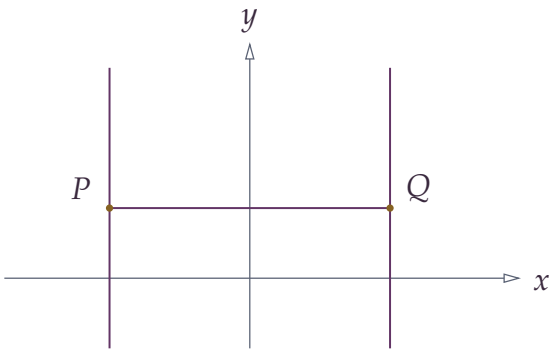


Figura 1.19: A reflexão no eixo y troca as retas $x = -2$ e $x = 2$. Nenhuma delas contém um ponto fixo dessa reflexão.

Entretanto, um ponto fixo da reflexão no eixo vertical precisa ter abscissa zero. Nenhum ponto de S tem essa abscissa. Portanto, nenhum de seus pontos fica parado, embora o conjunto inteiro seja conservado. Conservar um conjunto significa que as posições obtidas voltam a pertencer a ele; não exige conservar cada posição individualmente.

Exemplo 1.13. *Descrever o conjunto refletido*

Refletimos no eixo vertical todos os pontos que satisfazem $x + y = 3$. Que condição descreve exatamente os pontos obtidos?

Resolução.
Para distinguir o ponto inicial de sua imagem, escrevemos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$. Na reflexão no eixo vertical, ilustrada na Figura 1.20, $u = -x$ e $v = y$. Logo, $x = -u$ e $y = v$; substituir na condição inicial fornece $-u + v = 3$. Toda imagem satisfaz essa nova condição.

Os pontos P e Q ficam em lados opostos do eixo quando $x \neq 0$.

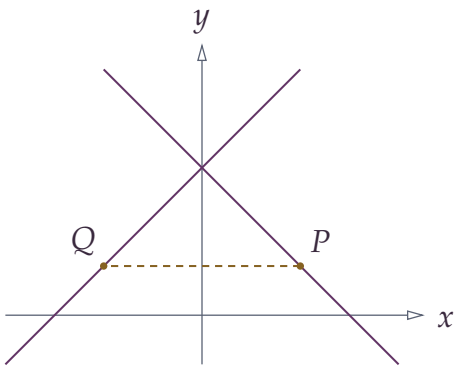


Figura 1.20: As retas $x + y = 3$ e $-x + y = 3$ são simétricas no eixo y. O ponto $P = (2, 1)$ tem imagem $Q = (-2, 1)$.

Reciprocamente, se $Q = (u, v)$ satisfaz $-u + v = 3$, então $P = (-u, v)$ satisfaz $x + y = 3$ e sua reflexão é Q. Isso mostra que a condição encontrada não incluiu pontos a mais. Usando novamente as letras x, y para as coordenadas de um ponto do conjunto obtido, sua equação é $-x + y = 3$.

1.5 Módulo, regiões e fronteiras

Ao resolver uma inequação, somar o mesmo real aos dois lados conserva sua ordem. Multiplicar ou dividir por um número positivo também conserva o sentido; por um número negativo, o sentido se inverte. Para justificar a inversão, se $u < v$, então $v - u > 0$. Com $c < 0$, temos $c(v - u) < 0$, logo $cv < cu$, isto é, $cu > cv$. Por exemplo, $-2x < 6$ equivale a $x > -3$, e não a $x < -3$.

Na reta numérica, $|x - c|$ mede a distância entre x e c. Se $x \geqslant c$, essa distância é $x - c$; se $x < c$, ela é $c - x = -(x - c)$. É a mesma definição de módulo aplicada à diferença. Para $r > 0$, ficar a menos de r unidades de c significa estar entre $c - r$ e $c + r$:

$$|x - c| < r \Leftrightarrow c - r < x < c + r.$$

As extremidades não satisfazem a desigualdade estrita, pois nelas o módulo vale r. Se o sinal for $\leqslant$, elas passam a fazer parte do conjunto. Essas equivalências podem ser conferidas separando $x \geqslant c$ e $x < c$ na definição do módulo.

Exemplo 1.14. *Uma condição de módulo no plano*

Descreva todos os pontos $P = (x, y)$ tais que $|x - 1| < 2$. A ordenada recebe alguma restrição?

Resolução.
A condição pede que a abscissa fique a menos de duas unidades de 1. Portanto,

$$|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

A ordenada não aparece e pode ser qualquer real. O conjunto é a faixa vertical entre as retas $x = -1$ e $x = 3$, sem essas retas. Se $x = -1$ ou $x = 3$, o módulo vale 2, e a condição falha. Reciprocamente, toda abscissa estritamente entre esses limites tem distância a 1 menor que 2, seja qual for a ordenada.

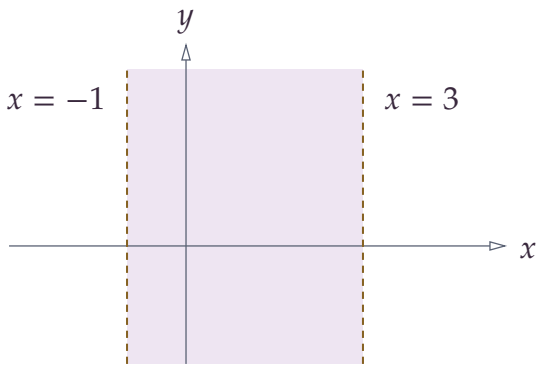
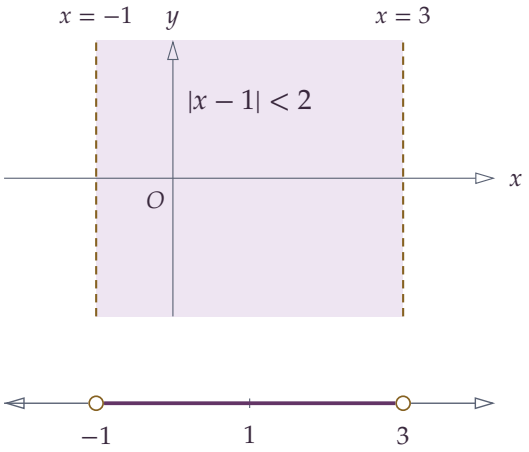


Figura 1.21: A faixa sombreada tem $-1 < x < 3$. As bordas tracejadas estão excluídas; a ordenada é livre.

Para reconhecer um ponto da **fronteira** de um conjunto, imagine círculos cada vez menores centrados nesse ponto. Por menor que seja o raio positivo, no interior de cada círculo deve haver tanto um ponto do conjunto quanto um ponto de fora.
Na faixa desenhada, um pequeno deslocamento horizontal a partir de uma das bordas pode levar para dentro ou para fora. A fronteira é a união das duas retas tracejadas.



As duas fronteiras ficam fora do conjunto.

Figura 1.22: A faixa tem ordenada livre. As retas tracejadas são fronteiras excluídas da condição estrita.

Usaremos traço contínuo para uma fronteira incluída e tracejado para uma fronteira excluída. Na reta numérica, um ponto cheio indica inclusão, e um ponto vazio indica exclusão. O desenho deve registrar o mesmo tipo de desigualdade do enunciado.

Exemplo 1.15. *Combinar restrições e conferir a borda*

Descreva a região definida simultaneamente por $|x| \leqslant 2$ e $y > 0$. Diga se ela contém os pontos $(2,1)$, $(0,0)$ e $(-2,0)$.

Resolução.
A primeira condição equivale a $-2 \leqslant x \leqslant 2$; a segunda conserva somente as ordenadas positivas. A região fica entre as duas verticais, incluindo seus trechos acima do eixo horizontal. O segmento do eixo horizontal entre $(-2,0)$ e $(2,0)$, incluindo suas extremidades, é a parte inferior da fronteira e fica excluído: nenhum ponto com $y = 0$ satisfaz $y > 0$.

O ponto $(2,1)$ pertence à região, pois $|2| = 2$ e $1 > 0$. Os pontos $(0,0)$ e $(-2,0)$ não pertencem, porque ambos têm ordenada zero. Satisfazer uma das condições não dispensa a outra.

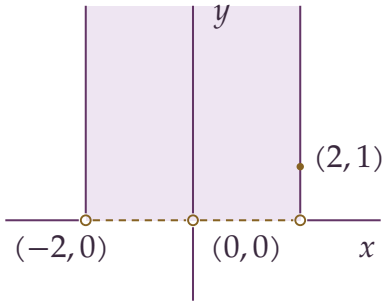


Figura 1.23: As verticais estão incluídas acima do eixo x. A borda inferior está excluída, inclusive nas extremidades.

Também há condições de módulo sem região de largura positiva. Se $|x - c| = 0$, a abscissa precisa ser c, e temos uma reta vertical. Se $|x - c| < 0$, não há pontos, porque um módulo nunca é negativo. Para uma igualdade $|x - c| = r$ com $r > 0$, as abscissas são $c - r$ e $c + r$; no plano, elas descrevem duas retas.

Exemplo 1.16. *Ficar fora de uma faixa*

Descreva os pontos do plano que satisfazem $|x - 1| \geqslant 2$. As duas restrições $x \leqslant -1$ e $x \geqslant 3$ devem ser impostas juntas?

Resolução.
A Figura 1.24 mostra as abscissas cuja distância a 1 é pelo menos 2. Para descrevê-las, analisamos os dois lados desse número. À esquerda de 1, a distância é $1 - x$, e $1 - x \geqslant 2$ equivale a $x \leqslant -1$. À direita de 1, a distância é $x - 1$, e $x - 1 \geqslant 2$ equivale a $x \geqslant 3$. Os valores encontrados pertencem aos lados em que cada expressão foi utilizada.

Portanto, temos $x \leqslant -1$ **ou** $x \geqslant 3$, com y livre. São dois semiplanos, e as retas $x = -1$ e $x = 3$ estão incluídas porque nelas o módulo vale 2. Cada ponto descrito satisfaz

a condição. Exigir as duas desigualdades simultaneamente daria o conjunto vazio: nenhuma abscissa é, ao mesmo tempo, no máximo -1 e no mínimo 3.

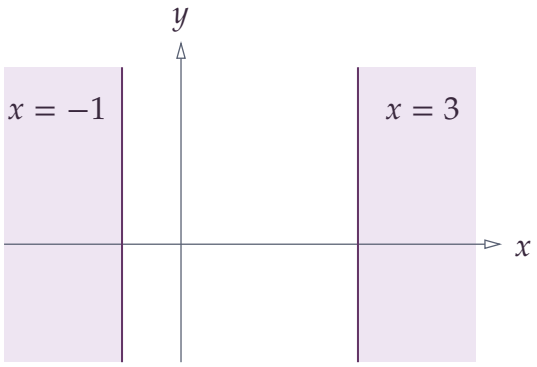


Figura 1.24: Os dois semiplanos sombreados satisfazem $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$. As duas retas de fronteira pertencem ao conjunto.

Exemplo 1.17. *Comparar duas distâncias na reta numérica*

Quais pontos do plano satisfazem $|x + 1| = |x - 3|$?

Resolução.
A igualdade compara as distâncias da **abscissa** x aos números -1 e 3 na reta numérica. Se $x < -1$, essas distâncias são $-x - 1$ e $3 - x$; a segunda é quatro unidades maior, e não podem ser iguais. Se $x > 3$, elas são $x + 1$ e $x - 3$; a primeira é quatro unidades maior.

Resta $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Nesse intervalo, a condição se torna $x + 1 = 3 - x$, dando $x = 1$.

Esse valor pertence ao intervalo considerado e faz os dois módulos valerem 2.
As duas distâncias horizontais medem 2 para todo ponto da vertical desenhada.

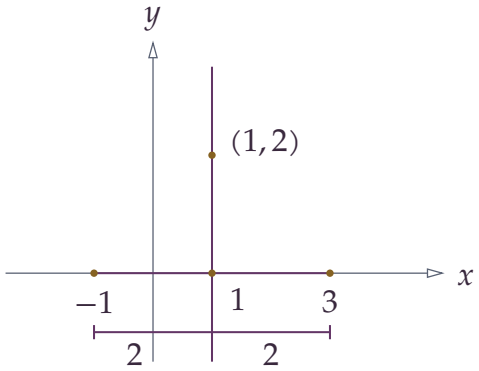


Figura 1.25: A abscissa 1 está a distância 2 de -1 e de 3. Todos os pontos da vertical $x = 1$ têm essa mesma abscissa.

Logo, ele é a única abscissa possível. Como a ordenada não foi restringida, o conjunto é a reta vertical $x = 1$, e não apenas o ponto $(1, 0)$.

1.6 Sistemas, equivalências e domínio

Um **sistema** impõe várias condições ao mesmo tempo. Seu conjunto solução é a **interseção** dos conjuntos de cada condição: um ponto precisa pertencer a todos eles. Por

exemplo, $x = 2$ descreve uma reta vertical, e $y = -1$ descreve uma horizontal. Juntas, elas selecionam o único ponto $(2, -1)$.

Exemplo 1.18. *Duas condições e uma interseção*

Encontre todos os pares reais que satisfazem $x + y = 5$ e $x - y = 1$.

Resolução.
Somar as duas igualdades elimina y: $2x = 6$, logo $x = 3$. Substituir na primeira dá $y = 2$. Assim, todo par que resolve o sistema precisa ser $(3, 2)$. Reciprocamente, $3 + 2 = 5$ e $3 - 2 = 1$, de modo que esse par satisfaz as duas condições. A interseção contém exatamente esse ponto.

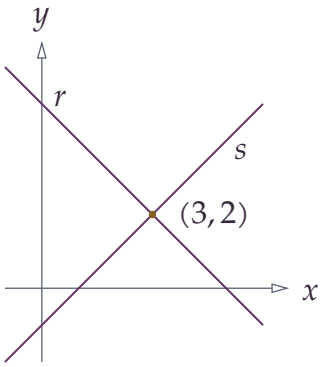


Figura 1.26: As duas condições definem retas que se encontram somente em $(3, 2)$.

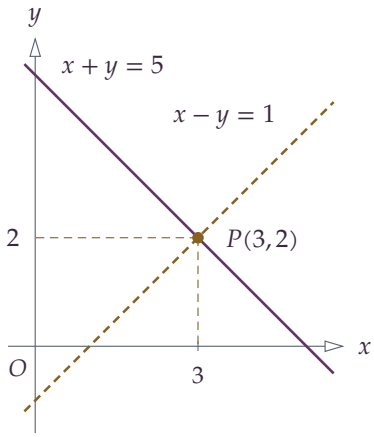


Figura 1.27: O ponto de interseção satisfaz simultaneamente as equações das duas retas.

Exemplo 1.19. *Separar casos antes de dividir*

Encontre todos os pares reais que satisfazem $xy = x$ e $x + y = 3$.

Resolução.
A primeira igualdade equivale a $xy - x = 0$. Pela distributividade, obtemos $x(y - 1) = 0$. Assim, $x = 0$ ou $y = 1$: são as duas retas da Figura 1.28. Cada alternativa ainda precisa satisfazer a segunda igualdade.

Se $x = 0$, então $y = 3$. Se $y = 1$, então $x = 2$. Os pares $(0, 3)$ e $(2, 1)$ de fato satisfazem as duas equações. O produto nulo esgotou as alternativas, portanto não há outros pares.

Dividir $xy = x$ por x sem examinar $x = 0$ conservaria somente o caso $y = 1$ e perderia $(0, 3)$. A análise do possível divisor nulo precisa anteceder a divisão.

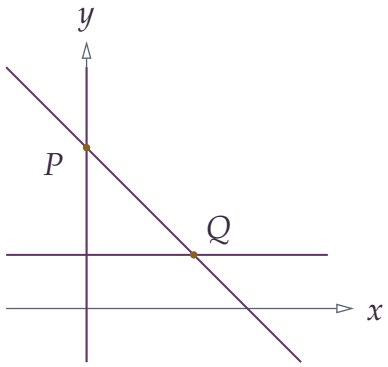


Figura 1.28: A primeira condição reúne $x = 0$ e $y = 1$. A reta $x + y = 3$ seleciona $P = (0, 3)$ e $Q = (2, 1)$.

Uma transformação de equação é **equivalente** quando conserva exatamente o conjunto solução no universo escolhido. Somar a mesma expressão, definida em todo o domínio considerado, aos dois lados é reversível pela subtração. Multiplicar os dois lados por uma constante não nula é reversível pela divisão por essa constante. Multiplicar por zero não tem essa propriedade: a equação $x = 1$ se transforma em $0 = 0$, que admite todo real.

Exemplo 1.20. *Uma multiplicação que acrescenta solução*

Considere as equações

$$x + 1 = 2 \quad \text{e} \quad (x - 3)(x + 1) = 2(x - 3).$$

A substituição da primeira pela segunda conserva as soluções reais?

Resolução.
A equação original tem somente $x = 1$. Na equação proposta, reunir os termos e colocar o fator comum em evidência produz

$$(x - 3)(x + 1) - 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0.$$

Agora temos $x = 3$ ou $x = 1$, as duas raízes da parábola representada na Figura 1.29. Para $x = 3$, ambos os lados da equação proposta são zero, mas a original exigiria $4 = 2$. Portanto, as duas equações não são equivalentes.

Toda solução original continua sendo solução após a multiplicação. A recíproca falhou justamente no valor que anula $x - 3$: voltar à equação original por divisão seria permitido apenas para $x \neq 3$.

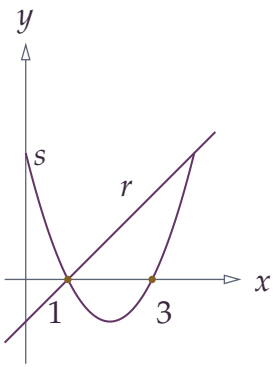


Figura 1.29: A reta $r : y = x - 1$ corta o eixo horizontal somente em $(1, 0)$. A parábola $s : y = (x - 3)(x - 1)$ também o corta em $(3, 0)$: a multiplicação acrescentou a solução $x = 3$.

Quando uma expressão contém denominador, seu **domínio** exclui os valores que o anulam. A fatoração pode simplificar a escrita, mas mantém excluídos os valores que anulam o denominador.

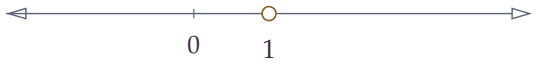
Proposição 1.7. (Cancelamento com domínio preservado). *Para reais u, v, com $u \neq 0$, o cancelamento de um fator comum dá*

$$\frac{uv}{u} = v.$$

Em um quociente de expressões, os valores que anulam o denominador continuam excluídos depois da simplificação.

Demonstração.
No quociente $\frac{x^2-1}{x-1}$, excluímos $x = 1$ antes de fatorar, pois o denominador seria zero. Na reta, o ponto vazio registra essa restrição.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$



$x \neq 1$: o ponto vazio permanece excluído.

Figura 1.30: O cancelamento conserva a exclusão de 1 no domínio, indicada pelo ponto vazio.

Para $u \neq 0$, dividir o produto uv pelo fator u desfaz a multiplicação e deixa v. Aplicando isso a $u = x - 1$ e $v = x + 1$, a diferença de quadrados dá, no domínio $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

A expressão simplificada assume o valor 2 em $x = 1$, mas a igualdade entre as duas expressões só vale onde ambas estão definidas. □

Exemplo 1.21. *Um candidato fora do domínio*

Resolva, em $\mathbb{R}$, $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Resolução.
A equação só admite $x \neq 1$. Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, nesse domínio podemos cancelar o fator $x-1$ e substituir o quociente por $x+1$, e obtemos $x+1 = 2$, isto é, $x = 1$. Esse valor foi excluído antes da simplificação. Portanto, a equação não tem solução. A conta encontrou o único candidato possível; esse valor está fora do domínio.

Elevar uma igualdade ao quadrado também exige cuidado. Se $u = v$, então $u^2 = v^2$; a recíproca pode falhar, como mostram $u = 2$ e $v = -2$. Pela diferença de quadrados, a igualdade $u^2 = v^2$ admite $u = v$ ou $u = -v$. Quando ambos os lados são não negativos, a segunda alternativa só acrescenta o caso $u = v = 0$, já incluído na primeira. Por isso, quando os dois membros são não negativos, elevar ao quadrado é reversível.

Exemplo 1.22. *Elevar ao quadrado e conferir o sinal*

Resolva $\sqrt{x+1} = x - 1$ em números reais.

Resolução.
A raiz exige $x + 1 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -1$. Além disso, seu valor é não negativo; portanto, uma solução precisa satisfazer $x - 1 \geqslant 0$, isto é, $x \geqslant 1$. Com esse sinal imposto, podemos elevar ao quadrado de modo reversível:

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow x + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0.$$

Os candidatos são 0 e 3, mas 0 não satisfaz $x \geqslant 1$. Para $x = 3$, os dois lados da equação original valem 2. Logo, a única solução é 3. De fato, para $x = 0$, a igualdade original exigiria $\sqrt{1} = -1$.

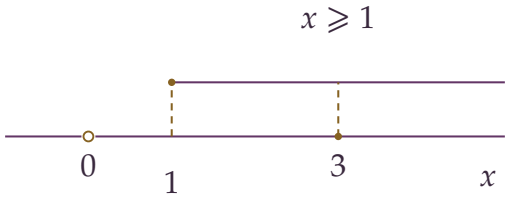


Figura 1.31: A equação quadrada também admite 0, mas só 3 pertence ao intervalo $x \geqslant 1$ exigido pelo sinal da equação original.

1.7 Um parâmetro que altera o conjunto +

Um **parâmetro** é uma letra cujo valor é fixado para definir uma condição, mas que podemos variar para comparar condições diferentes. Na equação $x^2 = k$, a letra x é a coordenada procurada; k determina qual equação estamos resolvendo. Separar os papéis

das letras impede que uma divisão descarte exatamente o valor do parâmetro em que o conjunto muda.

Exemplo 1.23. *Nenhuma, uma ou duas retas*

Para cada valor real de k, descreva os pontos (x, y) que satisfazem $x^2 = k$.

Resolução.
Se $k < 0$, não há pontos: nenhum quadrado real é negativo. Se $k = 0$, a única abscissa é $x = 0$, mas y continua livre; obtemos o eixo vertical, e não apenas a origem. Se $k > 0$, as abscissas são $\sqrt{k}$ e $-\sqrt{k}$, distintas porque $\sqrt{k} > 0$. O conjunto reúne as duas retas verticais correspondentes.

Cada ponto das retas descritas satisfaz a equação ao quadrado, e a definição da raiz, junto com o produto nulo, mostra que não existem outras abscissas. Os três casos cobrem todos os valores reais do parâmetro.

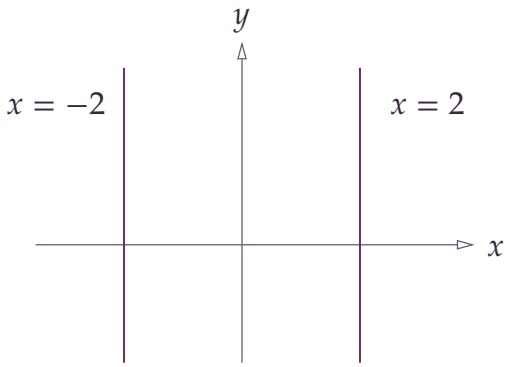


Figura 1.32: Para $k > 0$, as duas verticais têm abscissas opostas. Aqui, $k = 4$: as retas são $x = -2$ e $x = 2$. Para $k = 0$, resta o eixo y; para $k < 0$, não há pontos.

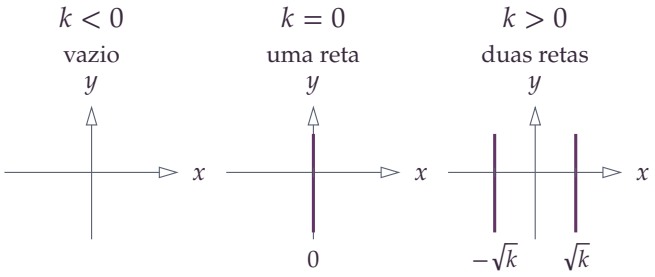


Figura 1.33: O sinal de k muda o conjunto descrito por $x^2 = k$, enquanto a ordenada permanece livre.

Exemplo 1.24. *Um coeficiente que pode se anular*

Para cada real k, descreva os pontos (x, y) que satisfazem $kx = k$.

Resolução.
Se $k \neq 0$, podemos dividir a igualdade por k e obter $x = 1$, com y livre. Reciprocamente, todo ponto de abscissa 1 satisfaz $kx = k$. Nesse caso, o conjunto é uma reta vertical, como o tipo de conjunto ilustrado na Figura 1.34.

Se $k = 0$, a condição é $0 = 0$, verdadeira para todo par real. O conjunto é o plano inteiro. Dividir por k antes de separar os casos apagaria essa possibilidade. Ao contrário do exemplo anterior, a mudança não depende de o parâmetro ser positivo ou negativo; depende de ele ser nulo ou não nulo.

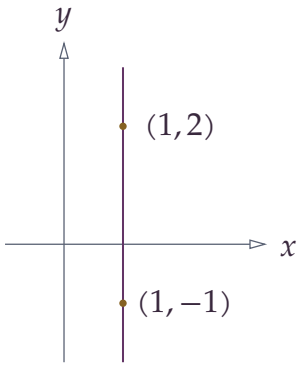


Figura 1.34: Para $k \neq 0$, todas as ordenadas são possíveis na reta $x = 1$. Para $k = 0$, a condição não restringe ponto algum do plano.

1.8 Equações quadráticas: existência e relações das raízes

Onde o gráfico de $y = (x-1)^2$ encontra o eixo horizontal? Um ponto comum deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Substituir $y = 0$ dá $(x-1)^2 = 0$. O único ponto comum é $(1, 0)$. Para x de qualquer lado de 1, o quadrado é positivo. O gráfico toca o eixo nesse ponto e volta a subir à direita dele. Se baixarmos o gráfico quatro unidades, a mesma procura dá $(x-1)^2 = 4$, com duas abscissas, -1 e 3.

Como prever quantas interseções existem quando o quadrado já está desenvolvido? Escrevemos a equação como $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais fixados e incógnita x. A equação é de segundo grau somente quando $a \neq 0$.

Se $a = 0$, devemos tratar $bx + c = 0$ diretamente: para $b \neq 0$, há a única solução $x = -\frac{c}{b}$; para $b = 0, c = 0$, todo real é solução; para $b = 0, c \neq 0$, não há solução. Esses casos não admitem divisão por a nem o uso de uma fórmula de segundo grau.

Teorema 1.8. (Discriminante e raízes reais). *Para $a \neq 0$, defina o* ***discriminante*** $\Delta = b^2 - 4ac$. *Então*

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow (2ax + b)^2 = \Delta.$$

- *Se $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *Se $\Delta = 0$, há uma única raiz real, $x = -\frac{b}{2a}$, chamada* ***raiz dupla****.*
- *Se $\Delta < 0$, não há raiz real.*

Demonstração.
Suponha então $a \neq 0$. Dividir a equação por a dá coeficiente 1 ao termo quadrático. Para completar o quadrado, a metade do coeficiente de x é $\frac{b}{2a}$, de modo que somamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros:

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\frac{c}{a} \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

O denominador $4a^2$ é positivo. Multiplicar por ele fornece a equivalência $(2ax + b)^2 = \Delta$. Portanto, o sinal do discriminante decide se o quadrado pode assumir o valor exigido.

Para $\Delta > 0$, o quadrado é igual a Δ exatamente quando $2ax + b = \sqrt{\Delta}$ ou $2ax + b = -\sqrt{\Delta}$. Resolver essas duas equações lineares produz as raízes exibidas. Elas são distintas porque $\sqrt{\Delta} > 0$ e $a \neq 0$. Se $\Delta = 0$, ambas as escolhas coincidem. Se $\Delta < 0$, a não negatividade de um quadrado impede qualquer solução real. Todas as passagens foram equivalências, inclusive quando $a < 0$.

A equação $(x - 1)^2 = 0$ do primeiro sistema tem discriminante $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. A raiz dupla $x = 1$ dá o ponto de tangência $(1, 0)$. Dos dois lados do vértice, a parábola fica acima do eixo horizontal. No eixo vertical, fixamos $x = 0$ e procuramos a ordenada. Resta a equação linear $y - 1 = 0$, cuja raiz $y = 1$ é simples. A curva atravessa esse eixo, pois há pontos seus à esquerda e à direita dele arbitrariamente perto de $(0, 1)$.

Compare os dois encontros no painel central. Cada eixo tem um só ponto em comum com a parábola, mas apenas o horizontal é tangente.

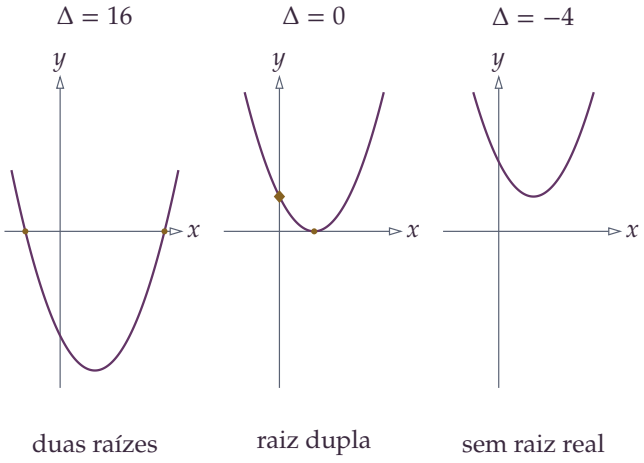


Figura 1.35: Da esquerda para a direita: $y = (x-1)^2 - 4$, $y = (x-1)^2$ e $y = (x-1)^2 + 1$. No centro, o ponto sobre o eixo x marca a raiz dupla; o losango indica o cruzamento com o eixo y.

□

Às vezes precisamos da soma ou do produto das raízes, sem precisar de cada uma separadamente. Se $\Delta \geqslant 0$, denote por r_1, r_2 as duas expressões da fórmula, contando a raiz dupla duas vezes quando $\Delta = 0$. Somando-as e multiplicando-as, obtemos

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Essas são as **relações de soma e produto das raízes**, também chamadas relações de Viète. No primeiro dos três gráficos, por exemplo, temos $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ e raízes $-1, 3$.

A distributividade liga essas relações à fatoração:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1 r_2 = ax^2 + bx + c.$$

Assim, a raiz dupla aparece como fator repetido, $a(x-r)^2$; há uma única solução, embora o fator ocorra duas vezes. Reciprocamente, se dois reais têm soma $-\frac{b}{a}$ e produto $\frac{c}{a}$, essa expansão prova que são precisamente as raízes da equação, contadas com repetição. Quando $\Delta < 0$, não existem duas raízes reais às quais aplicar as relações.

Exemplo 1.25. *Um coeficiente decide o grau e a quantidade de raízes*

Para cada número real m, determine as soluções reais de $mx^2 - 2x + 1 = 0$.

Resolução.
Primeiro, $m = 0$ transforma a equação em $-2x + 1 = 0$, com única solução $x = \frac{1}{2}$. Esse caso é linear. Para $m \neq 0$, calculamos o discriminante da equação quadrática: $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$.

No primeiro painel há uma reta. Nos outros três, compare as parábolas com o eixo horizontal.

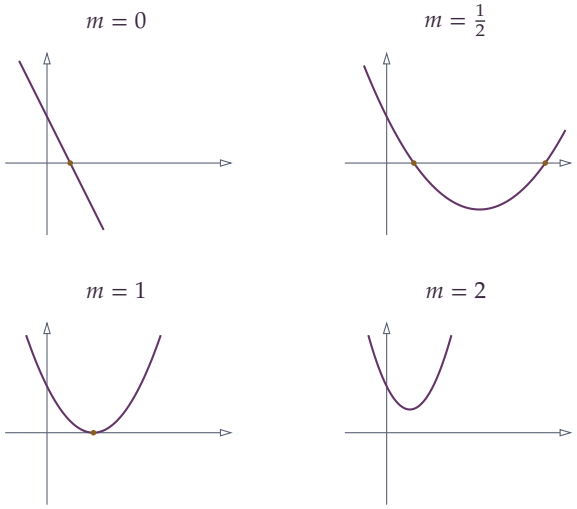


Figura 1.36: Gráficos de $y = mx^2 - 2x + 1$. A primeira equação é linear. Nos demais painéis, a parábola corta o eixo horizontal duas vezes, toca-o uma vez ou fica acima dele.

Se $m < 1$ e $m \neq 0$, o discriminante é positivo e as duas raízes distintas são

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - m}}{m}.$$

Em $m = 1$, a equação é $(x - 1)^2 = 0$, com raiz dupla 1. Para $m > 1$, o discriminante é negativo e não há raiz real. O valor $m = 0$ não pode ser inserido na fórmula com denominador m: sua única solução já foi determinada pela equação original.

Exemplo 1.26. *Usar soma e produto antes de calcular cada raiz*

Sejam r_1, r_2 as raízes de $3x^2 - 12x + 7 = 0$. Prove que elas são reais e positivas e determine $r_1^2 + r_2^2$ sem calcular cada raiz.

Resolução.
Antes de falar em sinais de raízes reais, verificamos sua existência: $\Delta = 144 - 84 = 60 > 0$. Logo, são duas raízes reais distintas. As relações de soma e produto das raízes fornecem $r_1 + r_2 = 4$ e $r_1 r_2 = \frac{7}{3}$.

O produto positivo mostra que nenhuma é zero e que ambas têm o mesmo sinal. A soma positiva exclui que ambas sejam negativas; portanto, as duas são positivas, como mostra a posição das raízes na Figura 1.37. Pela identidade do quadrado da soma,

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2 = 16 - \frac{14}{3} = \frac{34}{3}.$$

A conta usou somente as combinações pedidas, preservando a justificativa de que as raízes realmente existem.

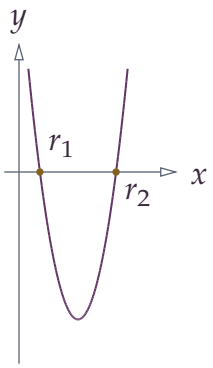


Figura 1.37: As raízes r_1 e r_2 de $3x^2 - 12x + 7$ são distintas e positivas; o gráfico mostra suas posições no eixo x.

1.9 Exercícios

Pares ordenados, eixos e escala

1.1. Classifique $A = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B = (0, -2)$, $C = (4, 0)$ e $D = (-1, -3)$ quanto ao quadrante ou ao eixo. Determine ainda quando os pares $(u, 3)$ e $(2, v)$ representam o mesmo ponto.

1.2. Num desenho, um centímetro representa duas unidades em ambos os eixos. A quantos centímetros e em quais sentidos devem ser marcadas as projeções do ponto $P = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$ a partir da origem? Se a escala vertical fosse um centímetro para uma unidade, as coordenadas de P mudariam? E sua posição física no papel?

Identidades, fatoração e raízes

1.3. Desenvolva $(2t - 3)^2$ e fatore $t^2 - 16$. Indique a identidade utilizada em cada caso e explique por que os resultados valem também para t negativo.

1.4. Resolva $x^2 + 4x = 5$ completando um quadrado. Confira as soluções na equação original.

1.5. Julgue e justifique: (a) para todo real t, $\sqrt{t^2} = t$; (b) $\sqrt{9}$ representa dois números, 3 e -3; (c) para todos os reais a, b, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. Para cada afirmação falsa, dê um contraexemplo ou identifique o erro e apresente a forma correta.

Equações e conjuntos de pontos

1.6. Descreva, no plano, os conjuntos definidos por (a) $x^2 = 9$; (b) $x^2 + y^2 = 0$; (c) $x^2 + y^2 = -1$. Compare o item (a) com a mesma equação resolvida apenas em $\mathbb{R}$.

1.7. Descreva todos os pontos do plano que satisfazem $(x - 1)(y + 2) = 0$. A afirmação de que necessariamente $x = 1$ e $y = -2$ é correta? Justifique a descrição nos dois sentidos.

Simetrias

1.8. Reflita $P = (-2, 3)$ primeiro no eixo vertical e depois no horizontal. Compare o resultado com a simetria de P em relação à origem. A comparação continua válida para qualquer ponto? Justifique pelas coordenadas.

1.9. Considere todos os pontos que satisfazem $x + y = 0$. A simetria na origem leva cada um deles a outro ponto do mesmo conjunto? A reflexão no eixo horizontal tem essa propriedade? Em caso negativo, determine quais pontos do conjunto continuam nele após essa reflexão.

Módulo, regiões e fronteiras

1.10. Descreva $|x+2| \leqslant 3$ em $\mathbb{R}$ e como condição no plano. Identifique as fronteiras no plano e diga se estão incluídas. Compare com a condição $-2x < 6$: de que lado de sua fronteira ficam os pontos admitidos?

1.11. Descreva o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente $|x| = 2$ e $y \geqslant 0$. Justifique por que o conjunto não é toda a faixa $-2 \leqslant x \leqslant 2$ acima do eixo horizontal.

1.12. Descreva a interseção das condições $|x-1| < 2$ e $|y+1| \leqslant 1$. Quais lados da região estão incluídos? Algum dos quatro pontos em que as retas de fronteira se encontram pertence ao conjunto?

Sistemas, equivalências e domínio

1.13. Encontre todos os pontos que satisfazem $x + y = 4$ e $x^2 = 4$. Justifique a existência de cada ponto obtido e a ausência de outros.

1.14. Compare os conjuntos solução dos sistemas: (a) $x + y = 3$ e $2x + 2y = 6$; (b) $x + y = 3$ e $2x + 2y = 7$. Descreva todos os pares quando houver soluções.

1.15. Resolva $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ em $\mathbb{R}$. Depois descreva a mesma igualdade como condição sobre os pares (x, y) do plano. Explique por que simplificar a fração não autoriza incluir $x = 2$.

1.16. Resolva separadamente $\sqrt{x+4} = x - 2$ e $\sqrt{x+4} = 2 - x$. Mostre por que as duas equações produzem a mesma equação ao quadrado, mas têm soluções diferentes.

1.17. * Determine todos os pares reais que satisfazem

$$(x + y - 4)^2 + (x - y - 2)^2 = 0.$$

Uma conferência numérica de um par é suficiente para provar que ele é a única solução? Justifique sua resposta.

Parâmetros

1.18. + Duas quantidades inteiras não negativas somam 1. O dobro da primeira mais o dobro da segunda é k. Para quais valores de k há pares possíveis? Enumere-os. Como muda a resposta se admitirmos quantidades reais não negativas?

Equações quadráticas e relações das raízes

1.19. Para cada real t, determine quantas raízes reais distintas tem a equação $tx^2 + 4x + t = 0$. Nos casos de raiz única, determine-a e indique quando é uma raiz dupla.

1.20. Dois números reais têm soma 5 e soma dos quadrados igual a 13. Determine seu produto, construa uma equação de segundo grau com coeficiente de x^2 igual a 1 cujas raízes sejam esses números e encontre-os. Confira se os números encontrados têm a soma e a soma dos quadrados dadas.

1.10 Soluções dos exercícios

Pares ordenados, eixos e escala

Exercício 1.1.

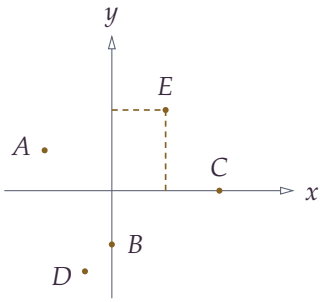


Figura 1.38: Sinais, eixos e coincidência de pares

O ponto A tem abscissa negativa e ordenada positiva, portanto pertence ao segundo quadrante. B está no eixo vertical, abaixo da origem; C está no eixo horizontal, à direita da origem. D tem as duas coordenadas negativas e pertence ao terceiro quadrante. Os pontos dos eixos não recebem um número de quadrante.

Para os pares $(u, 3)$ e $(2, v)$ coincidirem, as primeiras coordenadas devem ser iguais, dando $u = 2$, e as segundas também, dando $v = 3$. Esses valores de fato produzem o mesmo ponto $(2, 3)$.

Exercício 1.2.

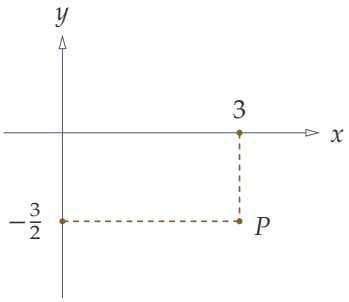


Figura 1.39: As projeções de $P = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$

Cada unidade ocupa meio centímetro. A projeção horizontal de P fica a $\frac{3}{2}$ centímetros à direita de O. A vertical fica a $\frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ de centímetro abaixo de O. O sinal da ordenada determina o sentido, sem tornar negativo o comprimento medido com a régua.

Alterar somente a escala vertical não muda as coordenadas declaradas, $\left(3, -\frac{3}{2}\right)$. Muda a posição física no papel: a projeção vertical passa a ficar a $\frac{3}{2}$ centímetros abaixo da origem. O desenho fica deformado em relação ao que usa a mesma unidade física nos dois eixos.

Identidades, fatoração e raízes

Exercício 1.3.

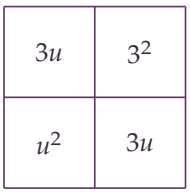


Figura 1.40: O quadrado da diferença, com $t = 3$ e $u = 2t - 3$

Aplicamos o quadrado da diferença com $a = 2t$ e $b = 3$:

$$(2t - 3)^2 = (2t)^2 - 2(2t)3 + 3^2 = 4t^2 - 12t + 9.$$

Para a segunda expressão, usamos a diferença de quadrados, pois $16 = 4^2$:

$$t^2 - 16 = (t - 4)(t + 4).$$

As duas identidades foram provadas por operações com números reais, sem hipótese de positividade das letras. Substituir um valor negativo de t não altera sua validade.

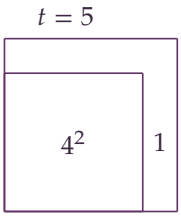


Figura 1.41: A diferença de quadrados, com $t = 5$

Exercício 1.4.

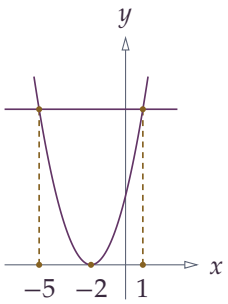


Figura 1.42: Completar o quadrado permite comparar alturas

O termo $4x$ sugere o quadrado $(x + 2)^2$. Somamos 4 aos dois lados e obtemos

$$x^2 + 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9.$$

Logo, $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$, e as soluções são 1 e -5. A substituição fornece $1 + 4 = 5$ e $25 - 20 = 5$. Como as transformações foram equivalentes e as duas raízes do quadrado foram consideradas, a lista é completa.

Exercício 1.5.

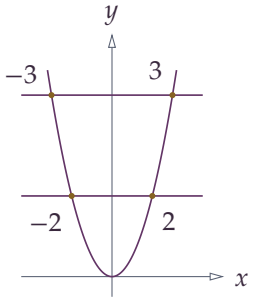


Figura 1.43: A equação $t^2 = 4$ tem soluções -2 e 2

(a) A afirmação é falsa: para $t = -2$, temos $\sqrt{t^2} = \sqrt{4} = 2$, que não é -2. A identidade válida para todo real é $\sqrt{t^2} = |t|$; ela se reduz a t quando $t \geqslant 0$.

(b) A afirmação é falsa. $\sqrt{9}$ é o único valor não negativo cujo quadrado é 9, portanto vale 3. O número -3 é outra solução da equação $u^2 = 9$, mas não é o valor indicado pelo símbolo da raiz.

(c) A afirmação é falsa. Com $a = 2$ e $b = 1$, o lado esquerdo vale 1, e o direito vale 3. A forma correta é $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Já $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ é a fatoração da diferença de quadrados.

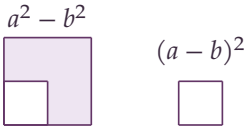


Figura 1.44: Um contraexemplo de áreas: $a = 2$, $b = 1$

Equações e conjuntos de pontos

Exercício 1.6.

(a) Pela diferença de quadrados, $x^2 = 9$ equivale a $(x - 3)(x + 3) = 0$, logo $x = 3$ ou $x = -3$.

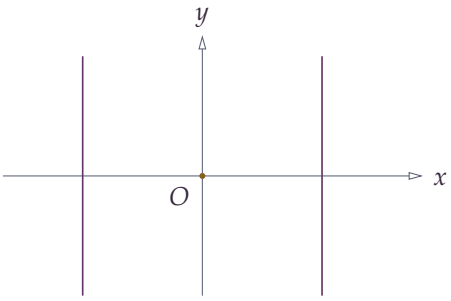


Figura 1.45: A equação $x^2 = 9$ reúne $x = -3$ e $x = 3$

Em $\mathbb{R}$, são dois números. No plano, a ordenada é livre, e o conjunto é a união das duas retas verticais $x = 3$ e $x = -3$.

(b) A soma de dois quadrados reais só é zero quando cada um é zero. Assim, $x = 0$ e $y = 0$, e o conjunto contém somente a origem. A origem de fato satisfaz a equação.

(c) Como $x^2 + y^2 \geqslant 0$ para todo par real, a soma não pode valer -1. O conjunto é vazio.

Exercício 1.7.

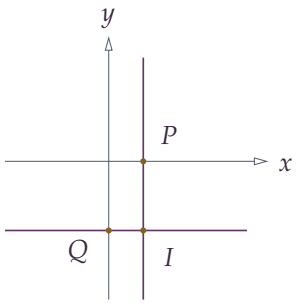


Figura 1.46: O produto nulo seleciona uma união de retas

O produto nulo exige $x - 1 = 0$ ou $y + 2 = 0$. Portanto, os pontos são todos os da reta vertical $x = 1$, juntamente com todos os da reta horizontal $y = -2$. Reciprocamente, em qualquer uma dessas retas um dos fatores é zero, de modo que o produto é zero.

Não é necessário satisfazer as duas igualdades ao mesmo tempo. Por exemplo, $(1, 0)$ e $(0, -2)$ satisfazem o produto, mas somente $(1, -2)$ satisfaz simultaneamente $x = 1$ e $y = -2$. Trocar o "ou" por "e" reduziria indevidamente duas retas a um ponto.

Simetrias

Exercício 1.8.

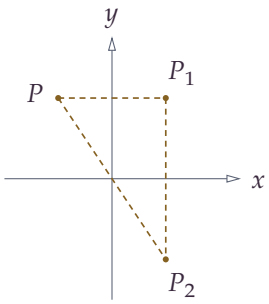


Figura 1.47: As duas reflexões nos eixos

A reflexão no eixo vertical troca o sinal da abscissa e leva $(-2, 3)$ a $(2, 3)$. A reflexão seguinte, no horizontal, leva esse ponto a $(2, -3)$. Esse é também o simétrico de P em relação à origem.

Para qualquer (x, y), as duas reflexões produzem $(-x, y)$ e depois $(-x, -y)$. A última expressão é a regra da simetria na origem; portanto, a comparação vale para todo ponto, inclusive os que estão nos eixos.

Exercício 1.9.
Se $x + y = 0$, a soma das coordenadas do simétrico na origem é

$$(-x) + (-y) = -(x + y) = 0.$$

Assim, todo ponto do conjunto é levado a outro ponto do mesmo conjunto.

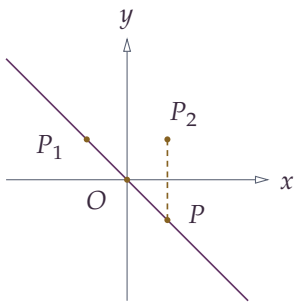


Figura 1.48: Conservar uma reta exige testar a condição inteira

Na reflexão no eixo horizontal, o ponto passa a $(x, -y)$. Para ele continuar no conjunto, precisamos de $x - y = 0$, além da condição original $x + y = 0$. Somando, obtemos $2x = 0$, logo $x = 0$ e $y = 0$. A origem permanece no conjunto. A propriedade não vale para todos os pontos: $(1, -1)$ satisfaz a condição, mas sua reflexão $(1, 1)$ não a satisfaz.

Módulo, regiões e fronteiras

Exercício 1.10.
A distância de x a -2 deve ser no máximo 3.

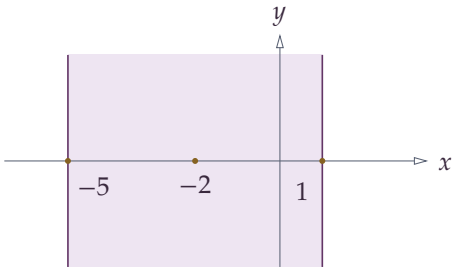


Figura 1.49: A faixa fechada de abscissas entre -5 e 1

Portanto,

$$|x + 2| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x + 2 \leqslant 3 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 1.$$

Em $\mathbb{R}$, o conjunto é o intervalo fechado de -5 a 1. No plano, é a faixa vertical de abscissas entre esses valores, com ordenada livre. Suas fronteiras são as retas $x = -5$ e $x = 1$, ambas incluídas, pois nelas o módulo vale exatamente 3.

Para a outra condição, dividir por -2 inverte o sinal: $-2x < 6$ equivale a $x > -3$. Os pontos admitidos ficam à direita da reta vertical $x = -3$, que é uma fronteira excluída. Ao contrário da faixa limitada por duas retas, essa condição descreve um semiplano.

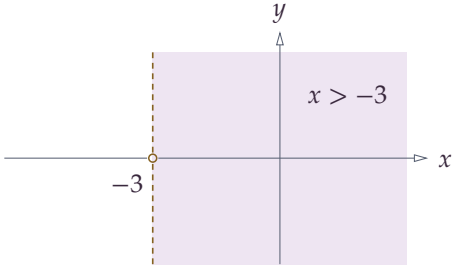


Figura 1.50: O sinal negativo da divisão muda o lado admitido

Exercício 1.11.
A igualdade $|x| = 2$ permite somente $x = 2$ ou $x = -2$.

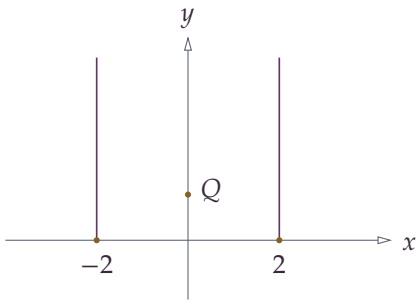


Figura 1.51: Duas abscissas possíveis, com ordenada não negativa

Com $y \geqslant 0$, obtemos duas semirretas verticais: os pontos $(2, y)$ e $(-2, y)$, com $y \geqslant 0$. Elas começam em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, que estão incluídos.

A faixa $-2 \leqslant x \leqslant 2$ também conteria abscissas intermediárias. Por exemplo, $(0, 1)$ está nessa faixa, mas $|0| = 0$, e não 2. A faixa corresponde a uma desigualdade de módulo; o problema impõe uma igualdade.

Exercício 1.12.

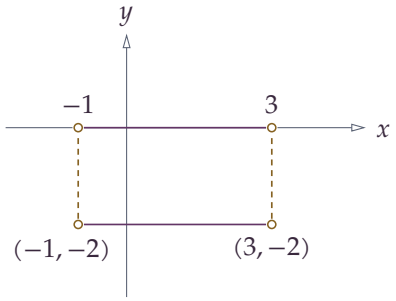


Figura 1.52: Lados horizontais incluídos, verticais excluídos

As condições equivalem a $-1 < x < 3$ e $-1 \leqslant y + 1 \leqslant 1$, isto é, $-2 \leqslant y \leqslant 0$. Portanto, o conjunto fica no retângulo limitado pelas retas $x = -1$, $x = 3$, $y = -2$ e $y = 0$.

Os trechos horizontais com $-1 < x < 3$ estão incluídos. Os lados verticais estão excluídos, porque suas abscissas tornam $|x - 1| = 2$. Consequentemente, os quatro pontos de interseção das retas de fronteira também estão excluídos: cada um deles pertence a uma das verticais proibidas. Reciprocamente, todo ponto com $-1 < x < 3$ e $-2 \leqslant y \leqslant 0$ satisfaz os dois módulos exigidos.

Sistemas, equivalências e domínio

Exercício 1.13.
A segunda condição dá $x = 2$ ou $x = -2$.

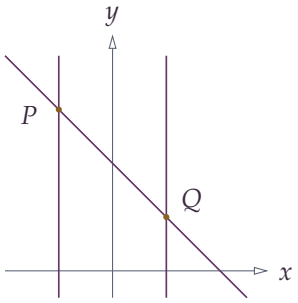


Figura 1.53: Cada abscissa permitida encontra uma única ordenada

Na primeira, $y = 4 - x$. Para $x = 2$, segue $y = 2$; para $x = -2$, segue $y = 6$. Assim, os únicos candidatos são $(2, 2)$ e $(-2, 6)$.

Nos dois pares, as coordenadas somam 4, e a abscissa ao quadrado vale 4. Logo, ambos são soluções. Como as duas possibilidades de abscissa foram esgotadas e cada uma determina uma única ordenada, não há outros pontos.

Exercício 1.14.

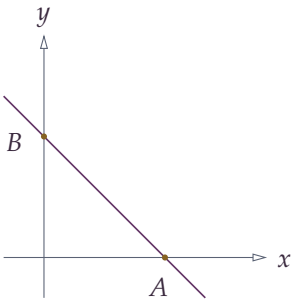


Figura 1.54: Condições proporcionais têm a mesma reta

(a) A segunda igualdade é o dobro da primeira. Todo ponto com $x + y = 3$ a satisfaz, e nada mais é imposto. Escolhendo uma abscissa real t, todos os pares são $(t, 3 - t)$. Eles formam a reta $x + y = 3$.

(b) A primeira igualdade obriga $2x + 2y = 6$, o que contradiz a segunda, que exige 7. Nenhum par pode atender às duas condições, e a interseção é vazia.

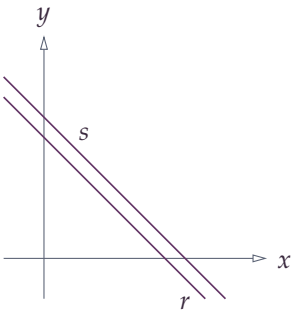


Figura 1.55: Uma mudança na constante separa as retas

Exercício 1.15.

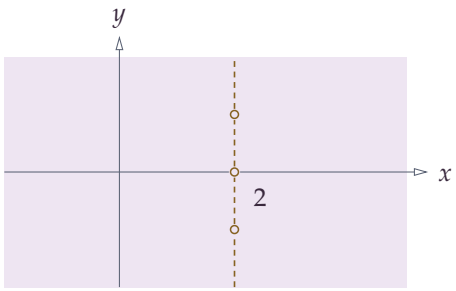


Figura 1.56: A simplificação conserva a exclusão de $x = 2$

O domínio exclui $x = 2$. Para todo outro real, a diferença de quadrados permite fatorar e cancelar o fator não nulo:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Assim, todo real diferente de 2 satisfaz a equação. O valor 2 não é uma solução porque a expressão original não está definida nele, ainda que a expressão simplificada esteja.

No plano, a coordenada y é livre. O conjunto é todo o plano, exceto a reta vertical $x = 2$.

A exclusão veio do denominador e precisa ser conservada depois do cancelamento.

Exercício 1.16.

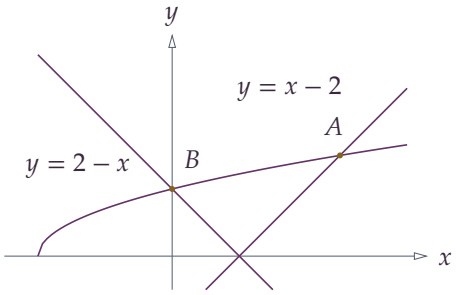


Figura 1.57: Ao elevar ao quadrado, perdemos a distinção entre os sinais

As duas raízes estão definidas em $x \geqslant -4$. Na primeira equação, o lado direito exige $x - 2 \geqslant 0$, logo $x \geqslant 2$. Ao quadrado, obtemos

$$x + 4 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0.$$

Os candidatos são 0 e 5. O sinal exigido exclui 0; para 5, temos $\sqrt{9} = 3 = 5 - 2$. A primeira equação tem somente a solução 5.

Na segunda equação, o lado direito exige $2 - x \geqslant 0$, logo $x \leqslant 2$, além de $x \geqslant -4$. Como $(2 - x)^2 = (x - 2)^2$, a equação quadrada é a mesma. Agora o sinal exclui 5 e permite 0. A conferência dá $\sqrt{4} = 2 = 2 - 0$. A segunda equação tem somente a solução 0. Ao elevar os dois membros ao quadrado, perdemos a diferença de sinal entre $x - 2$ e $2 - x$. Por isso conferimos em cada equação qual dos candidatos dá um segundo membro não negativo.

Exercício 1.17. *
Cada parcela é um quadrado real e, portanto, é não negativa.

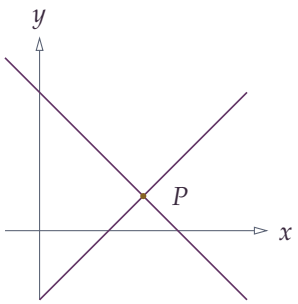


Figura 1.58: Somente a interseção das duas retas anula os dois quadrados

Se uma delas fosse positiva, a soma também seria positiva. Para a soma ser zero, ambas devem ser zero:

$$x + y - 4 = 0, \quad x - y - 2 = 0.$$

Somando as duas igualdades, temos $2x = 6$, logo $x = 3$. Da primeira, $y = 1$. O par $(3, 1)$ anula os dois quadrados e de fato resolve a condição original.

Conferir um par demonstra que ele é solução, mas não demonstra que seja a única. A unicidade veio do argumento que obrigou os dois quadrados a se anularem e do sistema que determinou as duas coordenadas.

Parâmetros

Exercício 1.18. +
A primeira igualdade obriga $2x + 2y = 2$.

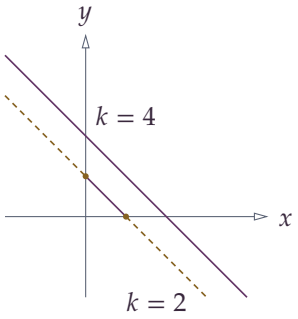


Figura 1.59: No primeiro quadrante e nos eixos, a reta $x + y = 1$ dá um segmento

Se $k \neq 2$, ela contradiz a segunda condição, e o conjunto é vazio. Se $k = 2$, a segunda condição repete o dobro da primeira; resta escolher, na reta $x + y = 1$, os pontos permitidos pelo enunciado.

Para $k = 2$, escrevemos $(x, y) = (t, 1 - t)$. As duas quantidades são não negativas exatamente quando $0 \leqslant t \leqslant 1$. Nesse intervalo os únicos inteiros são 0 e 1, de modo que os pares inteiros são $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Admitindo reais, obtemos todo o segmento entre esses pontos, inclusive suas extremidades. Em ambos os domínios, substituir $(t, 1 - t)$ dá soma 1 e soma dos dobros 2.

Equações quadráticas e relações das raízes

Exercício 1.19.
Se $t = 0$, a equação é $4x = 0$, com única raiz 0; ela é linear, portanto essa raiz não é uma raiz dupla de segundo grau.

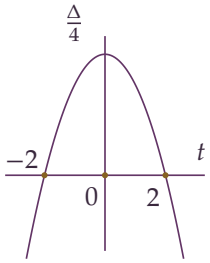


Figura 1.60: O sinal do discriminante e o caso linear

Para $t \neq 0$, os coeficientes de x^2, de x e o termo constante são t, 4 e t. Assim, $\Delta = 4^2 - 4t \cdot t = 4\big(4 - t^2\big)$. Seu sinal depende de t^2 ser menor, igual ou maior que 4.

Há duas raízes reais distintas quando $-2 < t < 2$ e $t \neq 0$. Há uma raiz dupla quando $t = 2$ ou $t = -2$: pela fórmula $x = -\frac{4}{2t}$, são -1 e 1, respectivamente. Se $t > 2$ ou $t < -2$, não há raiz real. Os intervalos, os dois extremos e o caso linear $t = 0$ abrangem todos os valores de t. Em particular, ter uma única raiz real não implica, por si só, que a equação tenha raiz dupla: é preciso conferir seu grau.

Exercício 1.20.
Sejam u, v os números. Em $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$, as somas dadas fornecem $25 = 13 + 2uv$, logo $uv = 6$.

Para obter as raízes u, v e o coeficiente 1 de x^2, tomamos $(x - u)(x - v) = 0$. O desenvolvimento determina a equação: $x^2 - (u + v)x + uv = 0$, ou $x^2 - 5x + 6 = 0$.

A fatoração $(x - 2)(x - 3) = 0$ dá apenas 2 e 3.
Como $2 + 3 = 5$ e $2^2 + 3^2 = 13$, o par satisfaz os dados. Só a ordem pode mudar.

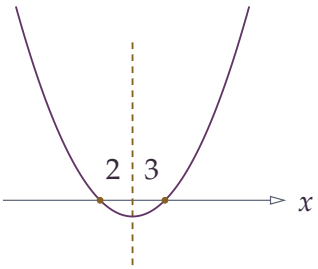


Figura 1.61: Soma e produto localizam as duas raízes

Capítulo 2

Pontos, segmentos e áreas

No mapa de uma praça, a fonte fica quatro unidades a leste do portão e três unidades ao norte. Um caminho que percorre primeiro um trecho para leste e depois outro para o norte mede sete unidades. Quanto mede o segmento que liga o portão diretamente à fonte? Para calcular essa distância em linha reta, podemos aproveitar o ângulo reto entre os dois trechos.

2.1 Distâncias no plano

Teorema 2.1. (Distância entre dois pontos). *Para $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, a distância entre A e B é*

$$d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Essa distância é não negativa e vale zero exatamente quando $A = B$.

Demonstração.
Trace a horizontal por A e a vertical por B. Seu ponto de encontro é $D = (x_B, y_A)$, com a ordenada de A e a abscissa de B.
Os comprimentos dos dois trechos são $AD = |x_B - x_A|$ e $DB = |y_B - y_A|$.

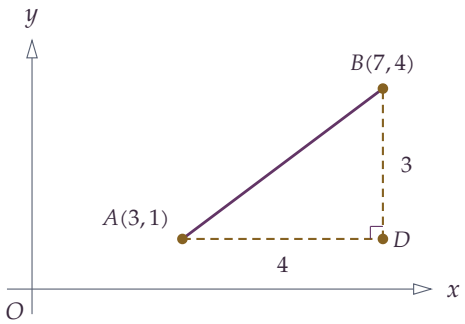


Figura 2.1: No mapa, $AD = 4$ e $DB = 3$. A distância procurada é AB.

Se os dois comprimentos são positivos, o triângulo ADB é retângulo em D. Por Pitágoras,

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

O quadrado de um número e o quadrado de seu módulo coincidem, pois trocar o sinal dos dois fatores conserva o produto. Quando um dos comprimentos é zero, os pontos estão numa mesma horizontal ou vertical, e a igualdade continua válida. Se ambos são zero, os pontos coincidem.

A distância é a raiz não negativa dessa soma de quadrados. Ela é zero exatamente quando as duas diferenças são zero, isto é, quando $A = B$. □

Exemplo 2.1. *Uma distância a partir de dois deslocamentos*

Determine a distância entre $A = (3, 1)$ e $B = (7, 4)$.

Resolução.
Os deslocamentos horizontal e vertical têm comprimentos $7 - 3 = 4$ e $4 - 1 = 3$. Como esses dois trechos são perpendiculares, o segmento AB é a hipotenusa. Por Pitágoras,

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Somar $4 + 3$ daria o comprimento do caminho por $D = (7, 1)$, que muda de direção. O pedido é o comprimento do segmento AB.

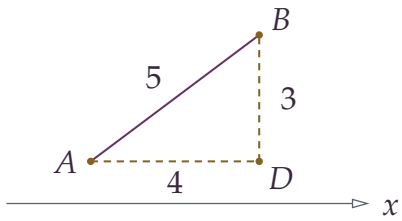


Figura 2.2: O caminho ADB mede $4 + 3 = 7$, enquanto o segmento AB mede 5.

Exemplo 2.2. *Quando uma diferença é zero*

Os pontos $A = (-2, 5)$, $B = (-2, -1)$ e $C = (4, -1)$ formam um caminho de A até C passando por B. Compare seu comprimento com AC e determine AA.

Resolução.
Como A e B têm a mesma abscissa, o primeiro segmento é vertical. Como B e C têm a mesma ordenada, o segundo é horizontal. Para esses segmentos da Figura 2.3, a fórmula da distância entre pontos continua válida com uma das diferenças nula:

$$AB = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6, \quad BC = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6.$$

O caminho por B percorre os dois catetos.

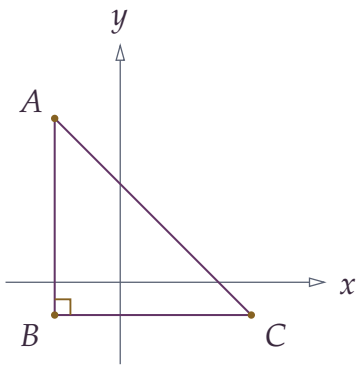


Figura 2.3: Os segmentos AB e BC formam o caminho de comprimento 12; AC é a ligação direta.

O caminho por B mede 12, enquanto

$$AC = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2} < 12.$$

Para comparar, basta observar que os quadrados desses comprimentos são 72 e 144. Finalmente, $AA = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$: pontos coincidentes têm distância zero, sem que seja necessário formar um triângulo.

Para comparar distâncias, nem sempre é necessário extrair raízes. Se $r, s \geqslant 0$, então

$$r < s \Leftrightarrow r^2 < s^2, \quad r = s \Leftrightarrow r^2 = s^2.$$

Para $0 < r < s$, trace duas semirretas perpendiculares de mesma origem. Sobre elas, construa os quadrados de lados r e s. O menor cabe no maior e ainda sobra a região sombreada. Logo, $r^2 < s^2$.

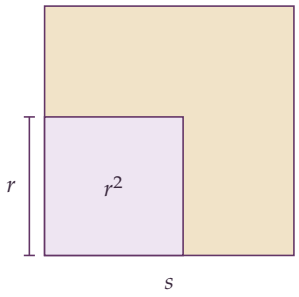


Figura 2.4: A região sombreada tem área $s^2 - r^2$.

As duas equivalências decorrem da identidade

$$s^2 - r^2 = (s - r)(s + r).$$

Quando r e s não são ambos zero, o fator $s + r$ é positivo. Assim, $s^2 - r^2$ e $s - r$ têm o mesmo sinal e se anulam juntos. O caso $r = s = 0$ verifica diretamente as duas afirmações. A hipótese de não negatividade é necessária: $-3 < 2$, mas $(-3)^2 > 2^2$.

Exemplo 2.3. *Comparar sem aproximar as raízes*

Qual dos pontos $A = (-3, 1)$ e $B = (5, 2)$ está mais próximo de $C = (1, -2)$?

Resolução.
Compararemos os quadrados das distâncias, pois ambas são não negativas. Temos

$$CA^2 = (-3 - 1)^2 + (1 + 2)^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$CB^2 = (5 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 16 + 16 = 32.$$

Como $25 < 32$, o ponto A está mais próximo de C. As distâncias são 5 e $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, respectivamente; a comparação não exige uma aproximação decimal de $\sqrt{2}$.

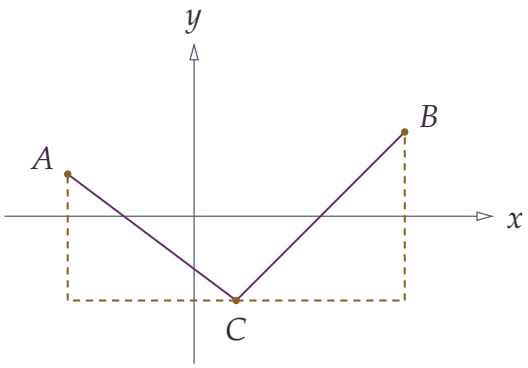


Figura 2.5: Os segmentos têm a extremidade C em comum. Os quadrados de seus comprimentos são $CA^2 = 25$ e $CB^2 = 32$.

Exemplo 2.4. *Reconhecer um ângulo reto pelos comprimentos*

Verifique se o triângulo de vértices $A = (-1, 1)$, $B = (2, 5)$ e $C = (6, 2)$ é retângulo e identifique seu ângulo reto.

Resolução.
Na configuração da Figura 2.6, calculamos os três quadrados pela fórmula da distância entre pontos:

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad BC^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25,$$

$$AC^2 = 7^2 + 1^2 = 50.$$

Os comprimentos $5, 5$ e $5\sqrt{2}$ satisfazem a desigualdade triangular estrita, pois $\sqrt{2} < 2$; os pontos formam, portanto, um triângulo não degenerado. Como $AC^2 = AB^2 + BC^2$, a recíproca do teorema de Pitágoras garante que o ângulo oposto ao lado AC é reto. Logo, o triângulo é retângulo em B e também isósceles. O maior lado identifica a hipotenusa; não se deve escolher o vértice do ângulo reto antes dessa comparação.

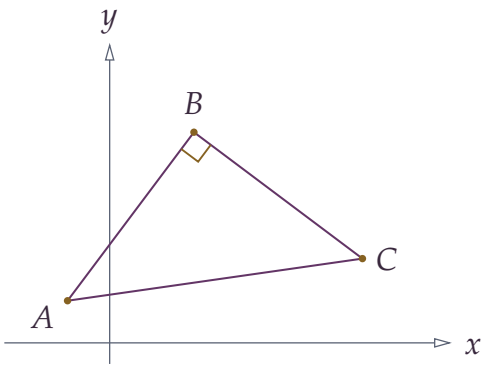


Figura 2.6: Os lados AB e BC são perpendiculares e têm comprimento 5. O lado AC é a hipotenusa.

2.2 O ponto médio de um segmento

O **ponto médio** de um segmento AB, com $A \neq B$, é o ponto M que pertence ao segmento e satisfaz $AM = MB$. Exigir que M esteja no segmento faz parte da definição: existem pontos fora da reta AB que também estão à mesma distância de suas extremidades.

Proposição 2.2. (Coordenadas do ponto médio). *O ponto médio de $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é*

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Se $A = B$, obtemos $M = A = B$, que é o único ponto do segmento reduzido a uma extremidade.

Demonstração.
Seja M o ponto médio de um segmento oblíquo AB. Queremos descobrir que fração das variações horizontal e vertical leva de A até M.
Projete B e M sobre a horizontal por A. Os pés são $D = (x_B, y_A)$ e $E = (x_M, y_A)$. O arco em A pertence aos dois triângulos.

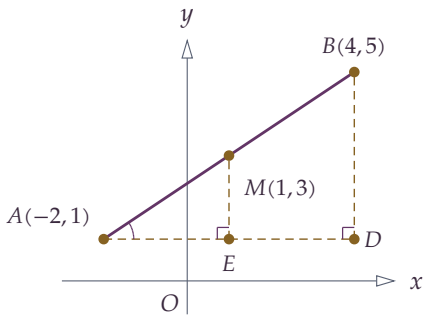


Figura 2.7: AE e AD medem os deslocamentos horizontais. As verticais por E e D fecham os dois triângulos.

Os triângulos AME e ABD são retângulos em E e D e têm o mesmo ângulo agudo em A; portanto, são semelhantes. A razão entre suas hipotenusas é $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; assim, a razão entre cada par de catetos também é $\frac{1}{2}$. Se o segmento é horizontal ou vertical, a mesma afirmação decorre diretamente da divisão do intervalo correspondente ao meio. O sentido de cada deslocamento é o mesmo de A para M e de A para B, de modo que as relações também valem para diferenças negativas.

Logo,

$$x_M - x_A = \frac{x_B - x_A}{2}, \quad y_M - y_A = \frac{y_B - y_A}{2}.$$

Isolando as coordenadas de M, obtemos a fórmula enunciada. A construção partiu do ponto médio do próprio segmento; assim, ela justifica também que o ponto descrito pela fórmula pertence a AB.

Para $A = B$, as duas médias são as coordenadas da extremidade comum, conforme a convenção enunciada. □

Exemplo 2.5. *Localizar e conferir o ponto médio*

Determine o ponto médio de $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 5)$ e calcule sua distância a cada extremidade.

Resolução.
De A a B, avançamos 6 unidades na horizontal e 4 na vertical. Para chegar à metade do segmento, fazemos metade de cada deslocamento, conservando seus sentidos. Portanto,

$$M = \left(-2 + \frac{6}{2}, 1 + \frac{4}{2}\right) = (1, 3).$$

Os deslocamentos de A para M e de M para B são, em ambos os casos, 3 na horizontal e 2 na vertical. Portanto,

$$AM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \quad MB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Já $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$. As contas confirmam que cada metade tem metade do comprimento total. A construção garante que M está no segmento. A igualdade das distâncias, por si só, não garante isso.

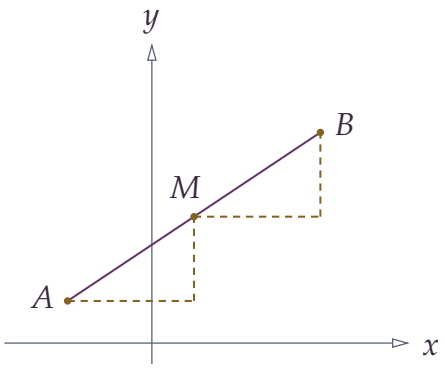


Figura 2.8: Os dois deslocamentos sucessivos são $(3, 2)$, colocando $M = (1, 3)$ sobre o segmento e a igual distância das extremidades.

Exemplo 2.6. *Equidistância não basta para ser ponto médio*

Para $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$, o ponto $P = (0, 3)$ satisfaz $PA = PB$. Ele é o ponto médio de AB?

Resolução.
Temos $PA^2 = 2^2 + 3^2 = 13$ e $PB^2 = (-2)^2 + 3^2 = 13$, de modo que as distâncias são iguais. Mas todo ponto do segmento AB tem ordenada zero, enquanto P tem ordenada 3. Portanto, P não pertence ao segmento e não é seu ponto médio. O verdadeiro ponto médio é $M = (0, 0)$, obtido pelas médias das coordenadas das extremidades e

indicado na Figura 2.9. A igualdade das distâncias é uma condição necessária, mas também é preciso que P esteja no segmento.

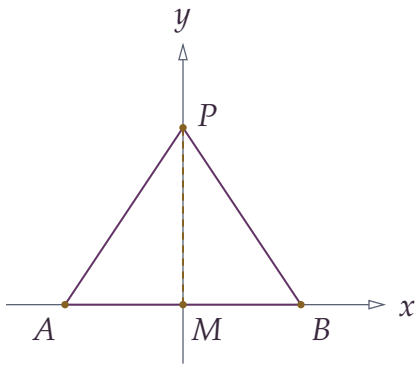


Figura 2.9: $P = (0,3)$ é equidistante de A e B, mas o ponto médio do segmento é $M = (0,0)$.

A configuração da Figura 2.7 também pode ser lida no sentido inverso. Se uma extremidade e o ponto médio são conhecidos, a mesma fórmula determina a outra extremidade. Das igualdades $2x_M = x_A + x_B$ e $2y_M = y_A + y_B$, segue que

$$x_B = 2x_M - x_A, \quad y_B = 2y_M - y_A.$$

Exemplo 2.7. *Reconstruir um triângulo por dois pontos médios*

Em um triângulo ABC, conhecemos $A = (1,-2)$, o ponto médio $M = (3,1)$ de AB e o ponto médio $N = (-1,2)$ de AC. Determine B, C e o ponto médio de BC.

Resolução.
Como M é o ponto médio de AB, repetimos depois de M os deslocamentos de A até M: 2 para a direita e 3 para cima. Para C, repetimos depois de N os deslocamentos de A até N: 2 para a esquerda e 4 para cima. Assim, nos lados da Figura 2.10,

$$B = (3+2, 1+3) = (5,4), \quad C = (-1-2, 2+4) = (-3,6).$$

Unindo B a C, obtemos o terceiro lado.

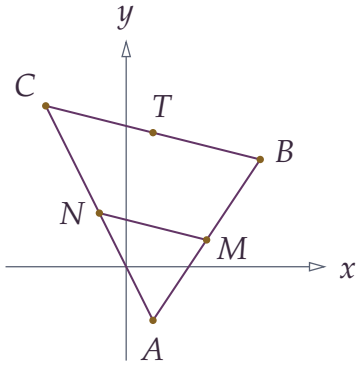


Figura 2.10: Calculando as médias das coordenadas de A e B e, depois, de A e C, obtemos $M = (3,1)$ e $N = (-1,2)$. O ponto médio de BC é $T = (1,5)$.

O ponto médio de BC é

$$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (1,5).$$

Para conferir a reconstrução, as médias de A com B e de A com C dão, respectivamente, $(3,1)$ e $(-1,2)$. Os dois pontos médios fornecidos pertencem a lados diferentes; fazer a média de M e N produziria o ponto médio de MN, que não é o pedido.

2.3 Dividir um segmento numa razão dada

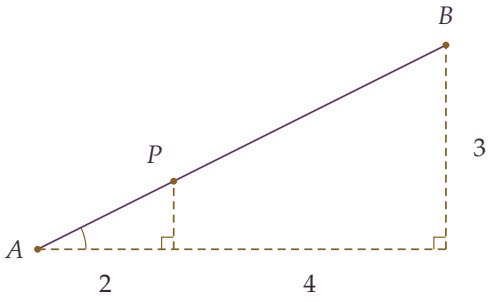
Uma estação deve ser colocada a dois quintos do percurso retilíneo entre duas extremidades. Conhecer apenas seu afastamento de uma extremidade não basta: é preciso garantir que ela esteja sobre o segmento. A ideia do ponto médio se estende a qualquer fração do percurso.

Proposição 2.3. (Divisão interna). *Se $A \neq B$, $m, n > 0$ e $AP : PB = m : n$, com P no interior de AB, então*

$$P = \left(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \frac{ny_A + my_B}{m+n} \right).$$

Reciprocamente, esse par determina o único ponto com as condições dadas.

Demonstração.
Sejam $A \neq B$ e $0 < t < 1$. Há um único ponto P de AB com $AP = tAB$. No caso oblíquo, trace a horizontal por A e as verticais por P e B. Obtemos dois triângulos retângulos com o mesmo ângulo em A.



$AP : PB = 1 : 2$

Figura 2.11: Em $A = (1,1)$, $B = (7,4)$ e $P = (3,2)$, a divisão é $AP : PB = 1 : 2$. As projeções têm a mesma razão.

Os triângulos são semelhantes. Como a razão entre as hipotenusas é t, os catetos correspondentes também estão na razão t. Os deslocamentos pequenos e grandes em cada coordenada têm o mesmo sentido. Portanto,

$$x_P = x_A + t(x_B - x_A), \quad y_P = y_A + t(y_B - y_A).$$

Se o segmento é horizontal ou vertical, a relação vem da divisão do intervalo no eixo correspondente. Essa construção garante que o ponto está no segmento. Para $t = 0$ obtemos A, e para $t = 1$ obtemos B.

Se $AP : PB = m : n$, as parcelas de $AB = AP + PB$ são proporcionais a m e n. Assim, $t = \frac{AP}{AB} = \frac{m}{m+n}$. Substituí-lo nas coordenadas anteriores produz a fórmula. No sentido inverso, $0 < \frac{m}{m+n} < 1$ garante um ponto interior, e os comprimentos são tAB e $(1-t)AB$, cuja razão é $\frac{m}{n}$. □

Na fórmula, a fração $\frac{m}{m+n}$ multiplica as coordenadas de B. Ela mede a parte do percurso de A até P em relação a todo o segmento AB. Quanto mais perto de B estiver P, mais essa fração se aproxima de 1.

Exemplo 2.8. *Razão entre partes e fração do percurso*

Determine o ponto P que divide $A = (-2, 1)$ e $B = (8, 6)$ internamente na razão $AP : PB = 2 : 3$.

Resolução.
A razão $2 : 3$ divide o total em cinco partes, e AP ocupa duas delas. De A até B, a abscissa aumenta 10 e a ordenada aumenta 5. Para chegar a P a partir de A, percorremos dois quintos de cada variação:

$$P = \left(-2 + \left(\frac{2}{5}\right)10, 1 + \left(\frac{2}{5}\right)5\right) = (2, 3).$$

Os comprimentos são $AP = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ e $PB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$. A razão é $2 : 3$. Usar $t = \frac{2}{3}$ confundiria a razão entre as partes com a fração do percurso inteiro.

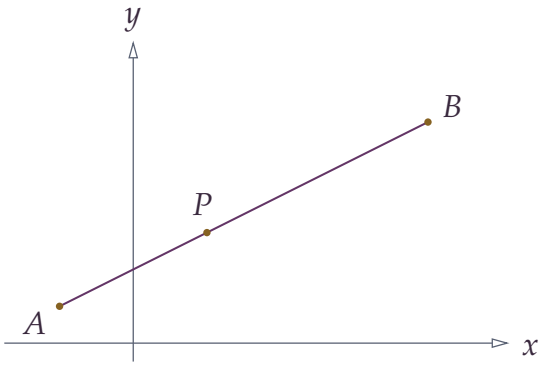


Figura 2.12: $P = (2, 3)$ está a $\frac{2}{5}$ do percurso de A a B, de modo que $AP : PB = 2 : 3$.

Exemplo 2.9. *Calcular a razão e verificar se o ponto pertence ao segmento*

Para $A = (1, -2)$ e $B = (7, 4)$, verifique se $P = (5, 2)$ e $Q = (5, 3)$ pertencem ao segmento. Quando pertencerem, determine a razão de divisão.

Resolução.
De A até B, cada coordenada aumenta 6. À fração t desse percurso corresponde o ponto $(1 + 6t, -2 + 6t)$. Precisamos obter a mesma fração pelas duas coordenadas de

P. A abscissa $5 = 1 + 6t$ dá $t = \frac{2}{3}$. A ordenada correspondente é $-2 + 6\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, logo P pertence ao segmento e $AP : PB = \left(\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{3}\right) = 2 : 1$.

Para Q, a mesma abscissa obriga $t = \frac{2}{3}$, mas a ordenada é 3, diferente da exigida. Portanto, Q não está no segmento, como mostra a Figura 2.13, embora cada uma de suas coordenadas esteja entre as coordenadas das extremidades. Estar dentro desse retângulo não basta para estar na linha que une A a B.

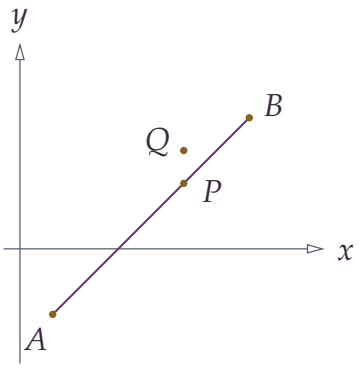


Figura 2.13: $P = (5, 2)$ está no segmento AB, mas $Q = (5, 3)$ não está na reta que o contém.

Divisão externa e razão orientada +

Prolongar o segmento também produz pontos colineares. Para todo real t, a expressão

$$P(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$$

percorre a reta AB. Para $t = 0$ estamos em A e para $t = 1$, em B. Se $0 < t < 1$, o ponto fica entre as extremidades. Se $t < 0$, fica antes de A e, se $t > 1$, além de B. Isso decorre das mesmas semelhanças das projeções, agora conservando ou invertendo os sentidos dos deslocamentos. Cada ponto da reta corresponde a um único valor de t, pois $A \neq B$ e pelo menos uma diferença de coordenadas é não nula.

Fixamos na reta o sentido de A para B. Um comprimento **orientado** recebe sinal positivo nesse sentido e negativo no contrário; escreveremos $\overline{UV}$ para esse número, sem confundi-lo com o comprimento não negativo UV. Então

$$\overline{AP} = tAB, \quad \overline{PB} = (1 - t)AB.$$

Para $P \neq B$, a razão orientada é $\rho = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{t}{1-t}$. No interior, ela é positiva; no exterior, negativa. A razão de comprimentos $\frac{AP}{PB}$ é positiva nos dois casos. Em $P = A$, as duas razões valem zero.

Proposição 2.4. (Divisão externa e forma orientada). *Para $A \neq B$, $m, n > 0$ e $m \neq n$, o ponto exterior com $AP : PB = m : n$ é*

$$P = \left(\frac{mx_B - nx_A}{m-n}, \frac{my_B - ny_A}{m-n} \right).$$

Mais geralmente, para razão orientada $\rho \neq -1$, vale

$$P = \left(\frac{x_A + \rho x_B}{1+\rho}, \frac{y_A + \rho y_B}{1+\rho} \right).$$

Demonstração.
Comecemos pelo sinal da razão. Se P está além de B, avançamos ao ir de A a P e recuamos para voltar a B. Se P está antes de A, ocorre o contrário. Nos dois casos, os deslocamentos têm sinais opostos, de modo que $\rho = -\frac{m}{n}$.
No desenho, a direita é o sentido positivo. Para ir de P até B, percorremos três unidades para a esquerda. Por isso, $PB = 3$ e $\overline{PB} = -3$.

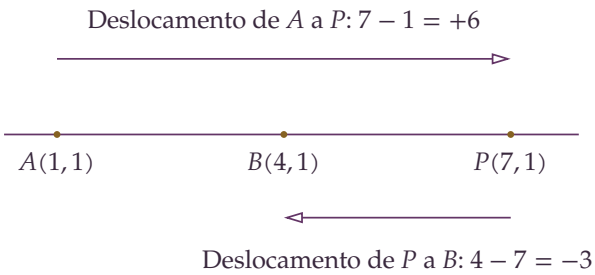


Figura 2.14: As distâncias são $AP = 6$ e $PB = 3$, logo $AP : PB = 2 : 1$. Com a direita como sentido positivo, a razão dos deslocamentos é $\rho = \frac{6}{-3} = -2$.

Para determinar a posição de P, vamos calcular t a partir de ρ. Em unidades de AB, os deslocamentos de A a P e de P a B são t e $1 - t$. Como $P \neq B$, podemos escrever

$$\rho = \frac{t}{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(1-t) = t \quad \Leftrightarrow \quad \rho = t(1+\rho).$$

Se $\rho = -1$, a última igualdade daria $-1 = 0$. Para qualquer outro valor, obtemos um único $t = \frac{\rho}{1+\rho}$, que é diferente de 1. Ao substituir em $x_P = x_A + t(x_B - x_A)$, obtemos $x_P = \frac{x_A + \rho x_B}{1+\rho}$. A mesma conta vale para a ordenada.

Na divisão externa, substituímos $\rho = -\frac{m}{n}$ e obtemos $t = \frac{m}{m-n}$ e as coordenadas enunciadas. Se $m > n$, temos $t > 1$ e P está além de B. Se $m < n$, temos $t < 0$ e P está antes de A. Nos dois casos a razão de comprimentos é $|\rho| = \frac{m}{n}$. □

Para $m = n$, não há ponto exterior equidistante das extremidades; o único ponto da reta com distâncias iguais é o ponto médio, que é interior.

Exemplo 2.10. *A mesma razão, duas posições*

Para $A = (0,1)$ e $B = (6,4)$, determine os pontos de divisão interna e externa na razão $AP : PB = 2 : 1$.

Resolução.
Na divisão interna, as duas partes de AP e a única parte de PB compõem AB. Logo, $AP = \left(\frac{2}{3}\right)AB$. De A até B, as variações são $(6,3)$; dois terços delas levam a $P = (4,3)$.

Na externa, AQ deve ser maior que QB, pois a razão é $2 : 1$. Assim, Q fica além de B, com $AQ = AB + BQ$ e $AQ = 2BQ$. Subtraindo, $BQ = AB$ e $AQ = 2AB$. Repetimos duas vezes as variações $(6,3)$ a partir de A e obtemos $Q = (12,7)$. As duas posições estão representadas na Figura 2.15.

Para conferir, $AB = 3\sqrt{5}$. No primeiro caso, $AP = 2\sqrt{5}$ e $PB = \sqrt{5}$. No segundo, $AQ = 6\sqrt{5}$ e $QB = 3\sqrt{5}$. Ambas as razões de comprimentos são 2, mas as razões orientadas são, respectivamente, 2 e -2.

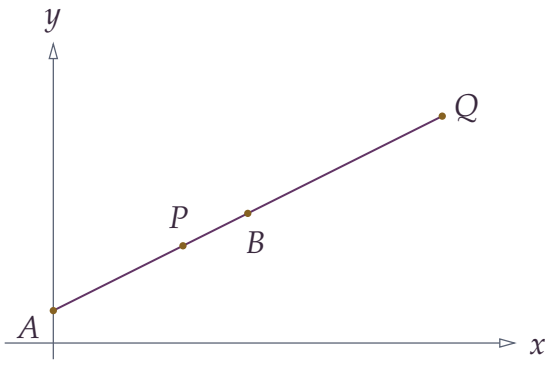


Figura 2.15: $P = (4,3)$ divide internamente e $Q = (12,7)$ divide externamente o segmento, ambos com razão de comprimentos $2 : 1$.

Exemplo 2.11. *Razão externa menor que um*

Para $A = (2,-1)$ e $B = (8,2)$, localize o ponto exterior com $AP : PB = 1 : 2$. Seria possível substituí-la por $1 : 1$?

Resolução.
A razão $1 : 2$ exige $PB = 2PA$, de modo que P fica antes de A, afastando-se de B. Nessa posição, $PB = PA + AB$. Juntar as duas igualdades dá $PA = AB$. De A a B, as variações são $(6,3)$; percorrê-las no sentido contrário a partir de A leva a $P = (2-6, -1-3) = (-4,-4)$, como mostra a Figura 2.16. Temos $AP = 3\sqrt{5}$ e $PB = 6\sqrt{5}$, como pedido.

Para $1 : 1$, o denominador seria zero. Isso não indica que devemos aproximar ou escolher coordenadas muito grandes: indica inexistência. Antes de A,

$PB = PA + AB > PA$; além de B, $PA = PB + AB > PB$. Como $AB > 0$, a igualdade não ocorre em nenhum dos dois prolongamentos.

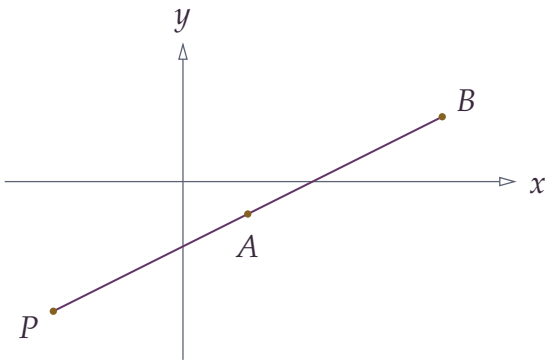


Figura 2.16: $P = (-4, -4)$ está no prolongamento anterior a A. Como $PB = PA + AB$, sua razão $PA : PB$ é menor que 1.

2.4 Escolher as coordenadas

Quando as coordenadas já constam do enunciado, trabalhamos no referencial fornecido. Quando a figura é dada por comprimentos e relações geométricas, podemos escolher os eixos. Colocar um vértice na origem elimina duas coordenadas; colocar um lado sobre um eixo elimina outra. Em uma configuração com simetria, a origem no centro dessa simetria pode produzir coordenadas opostas.

Essas escolhas mudam a descrição da figura, preservando seus comprimentos e ângulos. Manteremos a mesma unidade de comprimento: escolher um lado de comprimento 6 como referência não permite substituí-lo por um segmento de comprimento 1 sem alterar a escala. Também é necessário respeitar a configuração. Em um triângulo arbitrário, colocar um lado na horizontal não torna o terceiro vértice alinhado verticalmente com o ponto médio desse lado.

Exemplo 2.12. *Um referencial para um triângulo isósceles*

Um triângulo ABC satisfaz $AB = 6$ e $AC = BC = 5$. Determine a altura relativa à base AB e a área do triângulo.

Resolução.
Colocamos a origem no ponto médio da base e o eixo horizontal sobre ela. Como a base mede 6, suas extremidades ficam em $A = (-3, 0)$ e $B = (3, 0)$. Escolhemos o sentido positivo do eixo vertical para que o terceiro vértice fique acima da base, e tomamos $C = (u, h)$, com $h > 0$.

A igualdade dos lados deve determinar a coordenada que ainda não conhecemos. Igualando os quadrados de AC e BC,

$$(u + 3)^2 + h^2 = (u - 3)^2 + h^2,$$

$$u^2 + 6u + 9 = u^2 - 6u + 9 \Rightarrow 12u = 0.$$

Na expansão dos quadrados da soma e da diferença, os termos comuns se cancelam, restando $u = 0$. Usando agora $AC = 5$,

$$3^2 + h^2 = 25 \Rightarrow h^2 = 16.$$

Como $h > 0$, temos $h = 4$. A altura é a distância vertical de $C = (0, 4)$ à base. Pela fórmula da área de um triângulo, metade do produto da base pela altura,

$$[ABC] = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

Aqui, $[ABC]$ denota a área do triângulo. A coordenada $u = 0$ foi consequência da igualdade dos lados; não foi imposta como uma hipótese adicional.

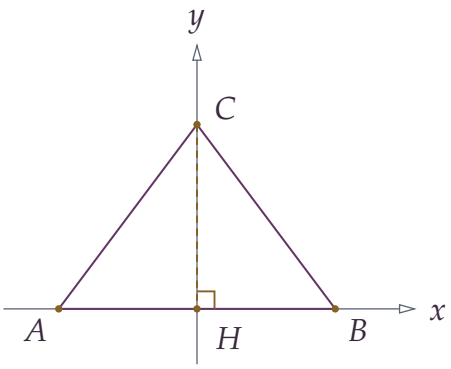


Figura 2.17: O ponto médio $H = (0, 0)$ da base é o pé da altura, e a igualdade dos lados determina $C = (0, 4)$.

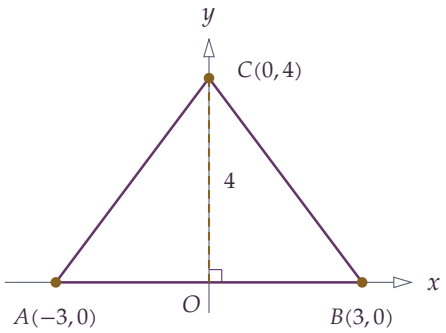


Figura 2.18: No triângulo isósceles, a origem no ponto médio da base produz extremidades com abscissas opostas.

Exemplo 2.13. *Coordenadas de um triângulo sem simetria*

Um triângulo ABC tem $AB = 14$, $AC = 13$ e $BC = 15$. Escolha coordenadas para seus vértices e determine a altura relativa a AB.

Resolução.
Tomamos $A = (0, 0)$ e $B = (14, 0)$ e orientamos o eixo vertical para que $C = (u, h)$ tenha $h > 0$. A origem em uma extremidade simplifica uma das distâncias. Não colocamos C sobre o ponto médio da base, pois os lados AC e BC são diferentes.

Aplicando a fórmula da distância aos lados representados na Figura 2.19,

$$u^2 + h^2 = 169, \quad (u-14)^2 + h^2 = 225.$$

Subtraímos a primeira equação da segunda para eliminar h^2 e u^2. Expandindo o quadrado da diferença e cancelando os termos comuns,

$$-28u + 196 = 56 \Rightarrow u = 5.$$

Então $h^2 = 169 - 25 = 144$. Como $h > 0$, resulta $h = 12$. Assim, $C = (5, 12)$ e a altura mede 12. A conferência dá $AC^2 = 25 + 144 = 169$ e $BC^2 = 81 + 144 = 225$. A escolha do semiplano superior determina o sinal de h; refletir o triângulo na base daria $C = (5, -12)$, com os mesmos comprimentos.

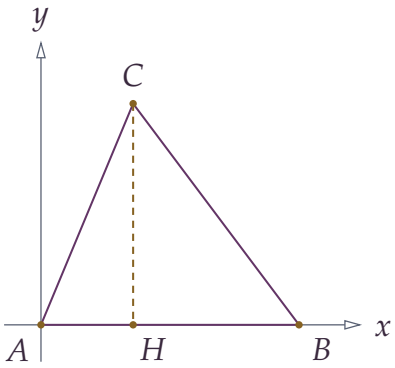


Figura 2.19: $H = (5, 0)$ é o pé da altura de $C = (5, 12)$ à base AB. Os comprimentos dos lados são 14, 13 e 15.

2.5 Colinearidade e determinante de ordem dois

Três pontos são **colineares** quando pertencem a uma mesma reta. Para verificar essa condição, não basta comparar suas abscissas ou ordenadas separadamente. Se $A \neq B$, os deslocamentos de A até um terceiro ponto C devem ter a mesma proporção dos deslocamentos de A até B.

Escrevamos $u = x_B - x_A$, $v = y_B - y_A$, $r = x_C - x_A$ e $s = y_C - y_A$. Pelo argumento das projeções semelhantes, C pertence à reta AB exatamente quando existe um real t com $r = tu$ e $s = tv$. Valores negativos indicam o prolongamento antes de A; valores maiores que 1, o prolongamento além de B. Essa descrição inclui retas verticais e horizontais e não depende das razões orientadas do complemento anterior.

Para abreviar uma expressão que aparecerá muitas vezes, definimos o **determinante de ordem dois** por

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix} = us - vr.$$

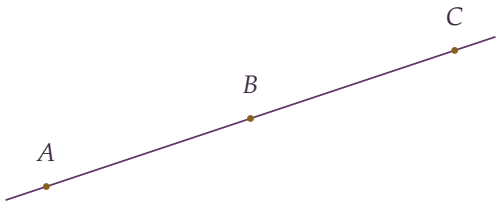
A disposição em duas linhas serve para lembrar a ordem dos produtos: produto da diagonal principal menos o da outra diagonal. Não será necessária uma teoria de matrizes.

Teorema 2.5. (Critério de colinearidade). *Para $A \neq B$, o ponto C pertence à reta AB se, e somente se,*

$$D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

Para pertencer ao segmento AB, é preciso ainda que o parâmetro comum t satisfaça $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Demonstração.
Se C está na reta AB, suas diferenças de coordenadas a partir de A são $(r, s) = (tu, tv)$. No desenho, $t = 2$, pois de A a C cada deslocamento é o dobro do correspondente de A a B.



$t_A = 0, t_B = 1, t_C = 2$

Figura 2.20: Os pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 2)$ e $C = (7, 3)$ são colineares; C está na reta, mas fora do segmento AB.

Logo, $us - vr = u(tv) - v(tu) = 0$. Para a recíproca, se $u \neq 0$, tomamos $t = \frac{r}{u}$; de $us - vr = 0$ vem $s = tv$. Se $u = 0$, necessariamente $v \neq 0$, pois $A \neq B$. A igualdade passa a $-vr = 0$, logo $r = 0$; tomando $t = \frac{s}{v}$, obtemos novamente as duas proporções. Em ambos os casos existe um mesmo t para as duas coordenadas, logo C pertence à reta AB. □

Se $A = B$, o determinante é zero para qualquer C. Os três pontos ainda cabem numa reta, mas os dois primeiros, sozinhos, não determinam uma reta única. Por isso, a hipótese $A \neq B$ é indispensável quando falamos em **a reta** AB.

Exemplo 2.14. *Uma reta vertical sem divisão por zero*

Determine k para que $A = (3, -1)$, $B = (3, 5)$ e $C = (k, 2)$ sejam colineares. O ponto C pertence então ao segmento AB?

Resolução.
Usamos o critério de colinearidade por determinante nulo. Os deslocamentos de A são $(0, 6)$ e $(k - 3, 3)$; portanto, $D = 0 \cdot 3 - 6(k - 3)$. A condição $D = 0$ equivale a $k = 3$. Nesse caso, $t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pela ordenada, e C é o ponto médio, como mostra a Figura 2.21. Dividir pela variação da abscissa de A a B seria impossível; a ordenada fornece o parâmetro sem dificuldade.

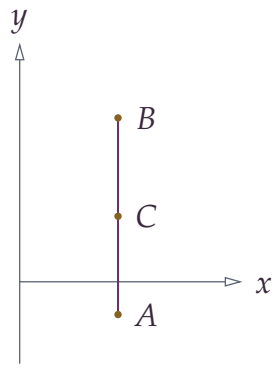


Figura 2.21: A condição $k = 3$ coloca $C = (3, 2)$ no ponto médio do segmento vertical AB.

Exemplo 2.15. *Estar na reta não é estar no segmento*

Para $A = (-1, 2)$ e $B = (3, 4)$, decida se $P = (5, 5)$ pertence à reta e se pertence ao segmento AB.

Resolução.
As diferenças são $(4, 2)$ e $(6, 3)$, de modo que o determinante formado por elas vale $4 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 0$. Logo, P pertence à reta. O parâmetro é $t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, também confirmado por $\frac{3}{2}$ na segunda coordenada. Como $t > 1$, o ponto está além de B, fora do segmento, como mostra a Figura 2.22. O determinante testa o alinhamento; o intervalo de t testa a posição.

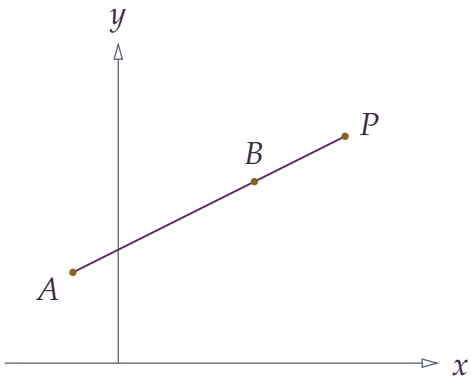


Figura 2.22: $P = (5, 5)$ pertence à reta AB, mas seu parâmetro $\frac{3}{2}$ o coloca além de B.

Exemplo 2.16. *Dois valores de um parâmetro para o alinhamento*

Para quais reais k os pontos $A = (0, 0)$, $B = (k, 1)$ e $C = (2, k)$ são colineares?

Resolução.
O ponto B nunca coincide com A, porque sua ordenada é 1. Podemos, portanto, testar se C pertence à reta determinada por eles. A partir de A, as diferenças de coordenadas até B são $(k, 1)$ e até C são $(2, k)$.

Escrevendo esses pares nas linhas do determinante, o critério de colinearidade fornece

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - 1 \cdot 2 = k^2 - 2 = 0.$$

Portanto, $k = \sqrt{2}$ ou $k = -\sqrt{2}$. Nos dois casos, $t = k$ satisfaz $(2, k) = t(k, 1)$, pois $k^2 = 2$. Assim, ambos os valores produzem alinhamento; nenhum deles pode ser descartado por sinal. Para $k > 0$, C está além de B; para $k < 0$, está antes de A. A Figura 2.23 mostra as duas configurações.

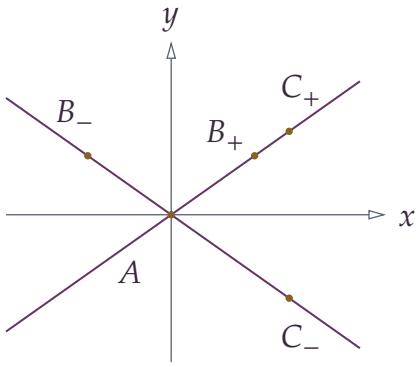


Figura 2.23: As duas posições possíveis de B e C pertencem a retas distintas que passam por A. Os índices indicam o sinal de k.

2.6 Área de triângulos e polígonos

Uma base horizontal permite calcular a área de um triângulo pela metade do produto da base pela altura. Quando nenhum lado é horizontal, podemos decompor a figura em trapézios com lados verticais. Essa decomposição conduz a uma fórmula que usa somente as coordenadas.

Teorema 2.6. (Área de um triângulo). *Para quaisquer pontos A, B, C, escreva as coordenadas de cada vértice numa linha e complete a última coluna com uns. A área é metade do módulo do determinante:*

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}, \quad [ABC] = \frac{|D|}{2}.$$

O determinante é zero exatamente quando os pontos são colineares, incluindo coincidências.

Demonstração.
Podemos calcular esse determinante com a regra de ordem dois que já conhecemos. Subtraímos a primeira linha de cada uma das outras duas, o que preserva o determinante. A última coluna passa a ter um único termo não nulo, o 1 na primeira linha. Ao desenvolver por essa coluna, seu sinal é positivo e restam as diferenças de coordenadas:

$$D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.$$

Tomando A como origem, escrevemos os deslocamentos até B e até C nas duas linhas desse determinante. Calculamos o produto da diagonal principal e subtraímos o da diagonal secundária. Vejamos por que o módulo da diferença é o dobro da área.

Primeiro suponha que $x_A \leqslant x_B \leqslant x_C$ e $x_A < x_C$. Podemos transladar a figura para cima até que as três ordenadas sejam não negativas; diferenças de coordenadas e áreas não mudam.
Trace as verticais por A, B, C até o eixo horizontal. Os segmentos AB e BC são as bordas superiores das duas regiões adjacentes.

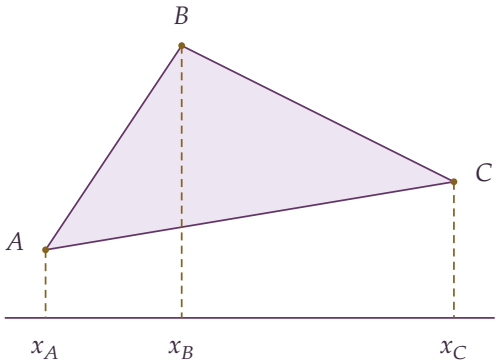


Figura 2.24: Em $A = (1,1)$, $B = (3,4)$ e $C = (7,2)$, a diferença entre as áreas sob ABC e AC é a área do triângulo.

As larguras dessas regiões trapezoidais são $x_B - x_A$ e $x_C - x_B$. Multiplicando cada largura pela média das alturas e somando, obtemos

$$T = \frac{(y_A + y_B)(x_B - x_A) + (y_B + y_C)(x_C - x_B)}{2}.$$

A área sob o segmento AC é $U = (y_A + y_C)\frac{x_C - x_A}{2}$. O ponto B está acima de AC, abaixo dele ou sobre ele. Nos dois primeiros casos, um desses contornos fica todo acima do outro, de modo que a área do triângulo é $|T - U|$; no último, ambos delimitam a mesma região e a diferença é zero. Trapézios de largura zero contribuem com zero, incluindo os casos de duas abscissas iguais.

Desenvolver os produtos e cancelar as parcelas repetidas dá

$$2(T - U) = (y_B - y_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A).$$

Esse número é $-D$, logo $|T - U| = \frac{|D|}{2}$.

Se as três abscissas forem iguais, o triângulo é degenerado e a fórmula dá zero. Para uma ordem qualquer dos vértices, expandir o determinante fornece

$$D = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - y_A x_B - y_B x_C - y_C x_A.$$

Uma troca de dois vértices troca apenas o sinal dessa expressão; uma mudança cíclica conserva seu valor. Portanto, podemos ordenar as abscissas para a demonstração e voltar

à ordem original sem alterar $\frac{|D|}{2}$. Finalmente, se $A \neq B$, o critério de colinearidade dá $D = 0$ exatamente quando C pertence à reta AB. Se $A = B$, há duas linhas iguais, a área é zero e qualquer reta que contenha o ponto repetido e C contém os três vértices. □

O número $\frac{D}{2}$ é chamado de **área orientada**. Com os sentidos usuais dos eixos, ele é positivo quando A, B, C são percorridos no sentido anti-horário e negativo no sentido horário. Na ordem de abscissas usada na prova, B acima de AC dá um percurso horário e $T - U > 0$, portanto $D < 0$; se B estiver abaixo, os sinais se invertem. Trocar a ordem ou fazer uma mudança cíclica confirma a regra para todas as posições. A área geométrica nunca recebe sinal negativo.

Exemplo 2.17. *Base vertical: a altura é horizontal*

Calcule a área do triângulo $A = (2, -1)$, $B = (2, 5)$ e $C = (7, 2)$ por base e altura e confira por coordenadas.

Resolução.
A base AB é vertical e mede 6. A perpendicular que parte de C, mostrada na Figura 2.25, encontra essa base em $(2, 2)$; sua distância horizontal é 5. Assim, $[ABC] = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$.

Para conferir pela fórmula, montamos as três linhas na ordem A, B, C. Os deslocamentos a partir de A são $(0, 6)$ e $(5, 3)$, logo

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = -30.$$

O sinal negativo registra a ordem horária dos vértices. A metade do módulo vale 15, a mesma área que encontramos medindo a altura na direção horizontal.

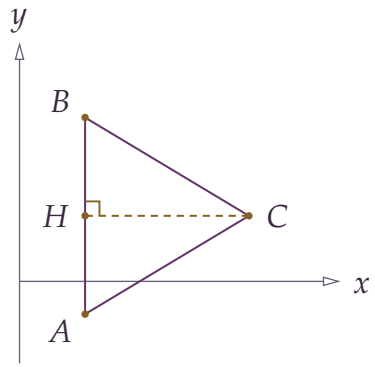


Figura 2.25: A base AB mede 6 e a altura horizontal CH mede 5, com $H = (2, 2)$.

Exemplo 2.18. *Uma base oblíqua sem calcular sua altura*

Calcule a área do triângulo $A = (-1, 1)$, $B = (3, 2)$ e $C = (1, 5)$. O resultado muda se trocarmos B por C na ordem de leitura?

Resolução.
Tomamos os deslocamentos a partir de A: $(4, 1)$ e $(2, 4)$. Pela fórmula da área por determinante, obtemos $D = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 14$, logo a área é 7. Na ordem A, C, B, o determinante é $2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -14$. A área orientada troca de sinal, mas a área geométrica do triângulo da Figura 2.26 permanece 7. Não foi necessário obter separadamente o comprimento da base e a altura oblíqua.

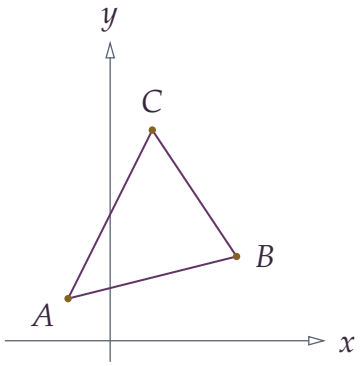


Figura 2.26: O mesmo triângulo é percorrido nas ordens A, B, C e A, C, B; a área geométrica é 7 em ambas.

Exemplo 2.19. *Área dada pode produzir dois vértices*

Para $A = (0, 1)$, $B = (4, 1)$ e $C = (2, k)$, determine todos os valores de k que fazem a área valer 6.

Resolução.
A base mede 4, e a altura é $|k - 1|$, não $k - 1$ sem uma condição de sinal. Pela metade do produto da base pela altura, $[ABC] = 2|k - 1|$. Portanto, $|k - 1| = 3$, isto é, $k = 4$ ou $k = -2$. Os dois pontos da Figura 2.27 ficam a três unidades da base, em lados opostos, e ambos fornecem área 6. O valor $k = 1$ produziria alinhamento e área zero.

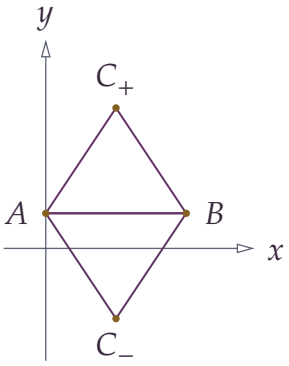


Figura 2.27: Os vértices $C_+ = (2, 4)$ e $C_- = (2, -2)$ estão em lados opostos da mesma base e produzem área 6.

Para um polígono, a ordem dos vértices faz parte dos dados. Vamos considerar um polígono **simples**: seus lados só se encontram em extremidades comuns a lados conse-

cutivos; não há cruzamentos nem trechos sobrepostos. Listamos os vértices $P_1, \ldots, P_n$ percorrendo sua borda, e repetimos $P_{n+1} = P_1$ para fechar a conta.

Teorema 2.7. (Área de um polígono simples). *Se $P_i = (x_i, y_i)$ são os vértices na ordem da borda, então*

$$D_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}, \quad S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} D_i\right|.$$

Cada determinante corresponde a um lado, incluindo o último, de P_n a P_1. Somamos as parcelas com seus sinais antes de tomar o módulo.

Demonstração.
Num polígono côncavo, ligar dois vértices fora da ordem da borda pode fechar uma reentrância e medir outra região.
Na figura, o trajeto de C até E passa por D.

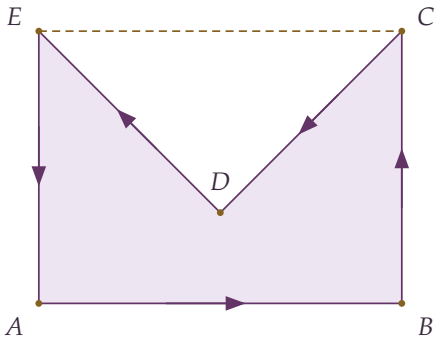


Figura 2.28: As setas percorrem a borda no sentido anti-horário. Entre C e E, o caminho passa pela reentrância em D.

Para medir somente o interior, trace verticais pelos vértices. Entre duas verticais consecutivas, os lados não se cruzam, e cada pedaço interior fica entre um segmento inferior e um superior: é um trapézio, possivelmente reduzido a um triângulo. Sua área é a largura multiplicada pela diferença das alturas médias dessas duas bordas.
A vertical por D corta o lado inferior em F e separa dois trapézios.

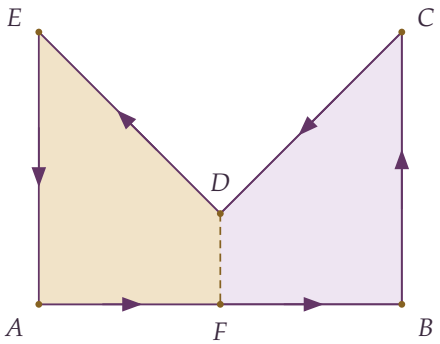


Figura 2.29: A vertical DF separa as faixas. Na primeira, o contorno passa de A a F pela borda inferior e de D a E pela superior.

Percorrendo a borda no sentido anti-horário, o interior fica localmente à esquerda do sentido de percurso de cada lado. Essa afirmação é local: em um polígono côncavo, o prolongamento de um lado pode deixar outras partes do interior à sua direita. Nas

faixas, os segmentos inferiores são percorridos para a direita e os superiores para a esquerda. Assim, somar as áreas dos trapézios equivale a somar, sobre todos os lados, $-(x_{i+1}-x_i)\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$. Lados verticais têm contribuição nula. Quando um lado passa por várias faixas, as parcelas recompõem o trapézio inteiro desse lado, pois as ordenadas variam linearmente. Expandindo a soma, os termos x_iy_i se cancelam com os de índice seguinte, e resta a soma da fórmula. No sentido horário, todas as contribuições mudam de sinal; seu módulo dá a área. Isso permite somar sobre os lados na ordem recebida, qualquer que seja o sentido do percurso. □

Se os lados se cruzarem, essa soma pode cancelar áreas de regiões diferentes e não é, em geral, a área da figura desenhada. Por exemplo, a ordem $(0,0),(2,2),(0,2),(2,0)$ produz soma zero, embora o traçado delimite duas regiões triangulares de área positiva. A hipótese de polígono simples e a ordem da borda não são detalhes dispensáveis.

Exemplo 2.20. *Um polígono côncavo e uma conferência geométrica*

Calcule a área do polígono de vértices consecutivos $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,3)$, $D=(2,1)$ e $E=(0,3)$.

Resolução.
Partimos de A e seguimos as setas até voltar a A. Em cada determinante, a primeira linha traz as coordenadas de onde saímos e a segunda, as de onde chegamos.

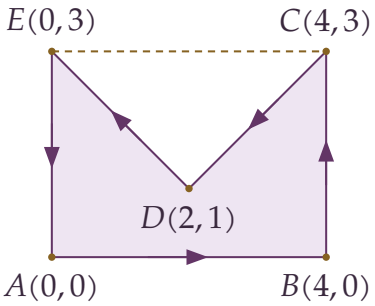


Figura 2.30: Ao chegar a C, seguimos até D e depois até E. O segmento tracejado CE completa o retângulo.

De C para D, escrevemos $(4,3)$ sobre $(2,1)$.

Do produto da diagonal principal subtraímos o produto da outra diagonal:

$$D_{CD}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-3\cdot 2=-2.$$

Percorrendo os cinco lados na ordem das setas, obtemos

$$\begin{aligned}
A\to B \quad & D_{AB}=0\cdot 0-0\cdot 4=0,\\
B\to C \quad & D_{BC}=4\cdot 3-0\cdot 4=12,\\
C\to D \quad & D_{CD}=4\cdot 1-3\cdot 2=-2,\\
D\to E \quad & D_{DE}=2\cdot 3-1\cdot 0=6,\\
E\to A \quad & D_{EA}=0\cdot 0-3\cdot 0=0.
\end{aligned}$$

A última linha fecha o contorno. Somamos com os sinais e tomamos a metade do módulo:

$$S = \frac{1}{2}|0 + 12 - 2 + 6 + 0| = \frac{16}{2} = 8.$$

Podemos conferir a área no desenho. Com o segmento tracejado CE, completamos um retângulo de área $4 \cdot 3 = 12$. A parte que acrescentamos é o triângulo CDE. Sua base CE mede 4 e está na altura $y = 3$. Como D tem ordenada 1, a altura do triângulo mede $3 - 1 = 2$. Sua área é $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, e a área do pentágono é $12 - 4 = 8$ unidades quadradas.

2.7 Igualdade de distâncias e mediatriz

A **mediatriz** de um segmento AB, com $A \neq B$, é a reta perpendicular a AB que passa por seu ponto médio. Ela pode ser reconhecida por uma condição de distâncias.

Teorema 2.8. (Mediatriz como lugar geométrico). *Para pontos distintos A e B, a mediatriz de AB é exatamente o conjunto dos pontos P tais que $PA = PB$.*

Demonstração.
Escolha a origem no ponto médio e o eixo horizontal sobre AB. Nesse referencial, as extremidades têm coordenadas $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$, com $a > 0$.
A perpendicular pelo ponto médio coincide agora com o eixo vertical.

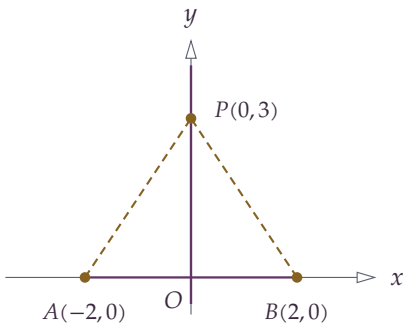


Figura 2.31: A origem está a meio caminho de A a B. Os segmentos tracejados ligam um ponto do eixo vertical às duas extremidades.

Para determinar todos os pontos equidistantes, tome $P = (x, y)$ em qualquer posição no plano. Temos

$$PA = PB \Leftrightarrow (x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

A primeira equivalência usa a não negatividade das distâncias. A última usa $a > 0$. O conjunto $x = 0$ é o eixo vertical, que passa pelo ponto médio e é perpendicular à base. As

equivalências provam os dois sentidos: todo ponto equidistante pertence à mediatriz, e todo ponto da mediatriz é equidistante. □

Se $A = B$, todo ponto do plano está à mesma distância das duas extremidades coincidentes. Nesse caso, a condição não descreve uma única reta, e não há uma mediatriz definida pelo segmento.

Exemplo 2.21. *Uma mediatriz em um referencial já dado*

Determine o conjunto dos pontos equidistantes de $A = (1, -1)$ e $B = (5, 3)$.

Resolução.
Tomamos $P = (x, y)$ e traduzimos a igualdade das distâncias pelos seus quadrados:

$$PA = PB \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2.$$

Expandindo e cancelando $x^2 + y^2$,

$$-2x + 2y + 2 = -10x - 6y + 34 \Leftrightarrow 8x + 8y = 32 \Leftrightarrow x + y = 4.$$

Todas as passagens são reversíveis. Portanto, o lugar procurado é a reta de equação $x + y = 4$, a mediatriz de AB. O ponto médio de AB é $M = (3, 1)$ e satisfaz a equação. A reta também contém $(4, 0)$ e $(0, 4)$, o que permite localizá-la no plano.

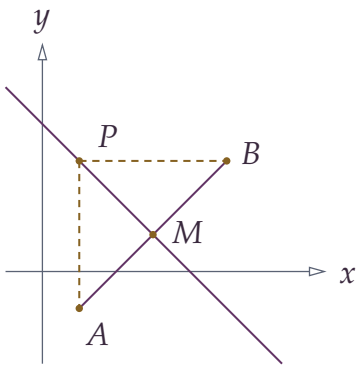


Figura 2.32: A mediatriz $x + y = 4$ cruza AB em $M = (3, 1)$. O ponto ilustrativo $P = (1, 3)$ pertence a ela e satisfaz $PA = PB$.

Exemplo 2.22. *Equidistância com uma restrição adicional*

Sejam $A = (2, -1)$ e $B = (2, 5)$. Determine os pontos equidistantes de A e B que pertencem ao eixo vertical. Existe algum ponto equidistante que pertença ao eixo horizontal?

Resolução.
Antes de impor um dos eixos, determinamos todos os pontos equidistantes. Para $P = (x, y)$,

$$PA = PB \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y + 1 = -10y + 25 \Leftrightarrow y = 2.$$

A não negatividade das distâncias e as operações reversíveis garantem a equivalência. O lugar é a mediatriz: uma reta horizontal, perpendicular ao segmento vertical AB, como mostra a Figura 2.33. No eixo vertical, $x = 0$, e obtemos unicamente $P = (0, 2)$. Suas duas distâncias valem $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. No eixo horizontal seria necessário ter simultaneamente $y = 0$ e $y = 2$, o que é impossível. Uma condição geométrica adicional pode selecionar um ponto do lugar ou não selecionar nenhum.

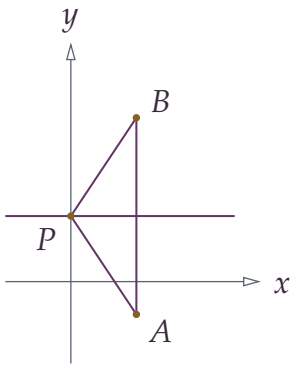


Figura 2.33: A mediatriz é $y = 2$; seu único ponto de interseção com o eixo y é $P = (0, 2)$. Ela não encontra o eixo x.

A identidade de Apolônio +

Uma soma de quadrados de distâncias também pode ser expressa por uma única distância ao ponto médio.

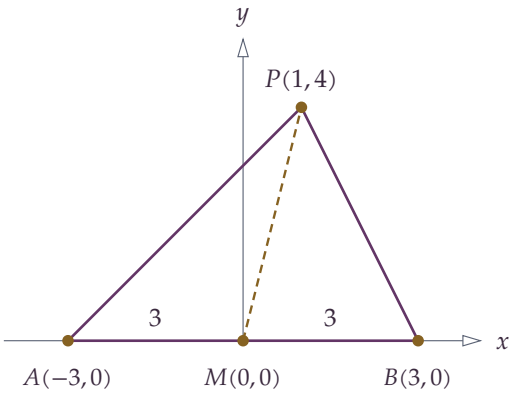
Teorema 2.9. (Identidade de Apolônio). *Se M é o ponto médio de AB, então, para todo ponto P,*

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

A identidade também vale quando P está na reta AB. Se $A = B$, ela permanece válida tomando $M = A = B$.

Demonstração.
Para $A \neq B$, escolha o ponto médio M como origem e o eixo horizontal orientado de A para B. As abscissas opostas $-a$ e a, com $a = \frac{AB}{2} > 0$, farão os termos mistos se cancelarem na soma.

O segmento PM liga P à origem.



$$32 + 20 = 2 \cdot 17 + \tfrac{36}{2} = 52$$

Figura 2.34: Com $A = (-3,0)$, $B = (3,0)$ e $P = (1,4)$, temos $PA^2 + PB^2 = 32 + 20 = 52$ e $2PM^2 + \frac{AB^2}{2} = 34 + 18 = 52$.

Para qualquer $P = (x,y)$, a fórmula da distância dá

$$PA^2 + PB^2 = (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 2\big(x^2 + y^2\big) + 2a^2.$$

Como $PM^2 = x^2 + y^2$ e $AB = 2a$, a igualdade obtida é a identidade enunciada.

Se $A = B$, temos $M = A = B$ e os dois membros são $2PA^2$. Nenhuma etapa exigiu que P estivesse fora da reta AB. □

Quando PAB é um triângulo, o segmento PM é sua **mediana** relativa ao lado AB: ele liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. A identidade determina o comprimento dessa mediana a partir dos três lados.

Exemplo 2.23. *Uma mediana a partir dos lados*

Um triângulo ABC tem $CA = 7$, $CB = 5$ e $AB = 8$. Determine o comprimento da mediana que parte de C.

Resolução.
Colocamos $A = (0,0)$ e $B = (8,0)$, de modo que o ponto médio é $M = (4,0)$. O vértice $C = (u,h)$ deve satisfazer as duas distâncias dadas:

$$u^2 + h^2 = 49, \quad (u-8)^2 + h^2 = 25.$$

Procuramos o quadrado da mediana, $CM^2 = (u-4)^2 + h^2$. Somar as duas equações e completar o quadrado em u fornece

$$2u^2 - 16u + 64 + 2h^2 = 74 \Leftrightarrow 2(u-4)^2 + 2h^2 + 32 = 74.$$

Portanto, $CM^2 = 21$ e $CM = \sqrt{21}$. É a identidade de Apolônio construída com os dados da Figura 2.35. Os lados são realizáveis, pois $7 - 5 < 8 < 7 + 5$; não estamos atribuindo uma mediana a um triângulo inexistente.

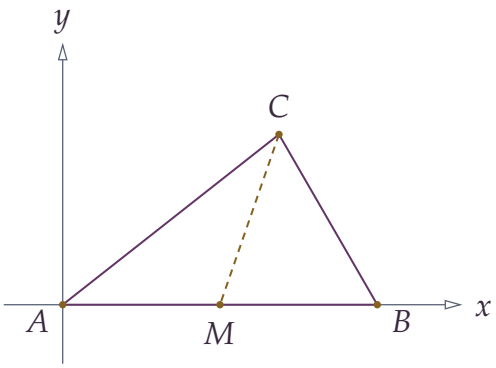


Figura 2.35: Um triângulo com esses lados tem vértices $A = (0,0)$, $B = (8,0)$ e $C = \left(\frac{11}{2}, \frac{\sqrt{75}}{2}\right)$. A mediana une C a $M = (4,0)$.

Exemplo 2.24. *O menor valor de uma soma de quadrados*

Sejam $A = (-1,2)$ e $B = (5,2)$. Para um ponto P que pode ocupar qualquer posição do plano, determine o menor valor de $PA^2 + PB^2$ e todos os pontos em que ele é atingido.

Resolução.
Escolhemos o ponto médio $M = (2,2)$ porque A e B ficam a três unidades dele, em lados opostos. Se $P = (2+u, 2+v)$, os quadrados das distâncias são $(u+3)^2 + v^2$ e $(u-3)^2 + v^2$. Na soma, os termos $6u$ e $-6u$ se cancelam. Como $PM^2 = u^2 + v^2$, obtemos a identidade de Apolônio para esses pontos:

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + 18.$$

Como $PM^2 \geqslant 0$, a soma é pelo menos 18. Esse valor é atingido: basta tomar $P = M$, a posição indicada na Figura 2.36, pois nesse caso $PM = 0$ e $PA = PB = 3$. Além disso, a igualdade exige $PM = 0$, que ocorre apenas quando $P = M$. Logo, o mínimo é 18, atingido unicamente em $(2,2)$. Para provar o mínimo, precisamos mostrar tanto que a soma não pode ser menor que 18 quanto que existe um ponto para o qual ela vale 18.

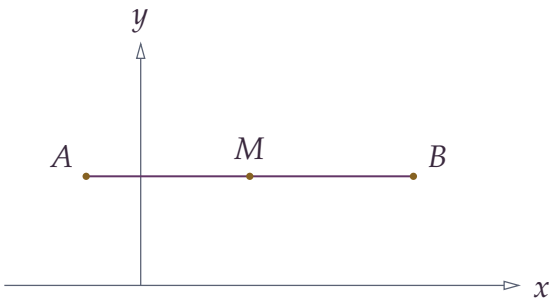


Figura 2.36: O mínimo é atingido quando o ponto variável coincide com $M = (2,2)$, ponto médio de AB.

2.8 Baricentro e coordenadas baricêntricas +

Num triângulo não degenerado, cada mediana liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Será que as três medianas passam por um mesmo ponto? A divisão interna fornece um candidato que não privilegia nenhum vértice.

Teorema 2.10. (Baricentro do triângulo). *As três medianas de um triângulo não degenerado encontram-se no* ***baricentro***

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

Ele divide cada mediana na razão $2:1$*, a partir do vértice.*

Demonstração.
Seja M o ponto médio de BC. Marque na mediana AM o ponto G que a divide na razão $AG : GM = 2 : 1$.

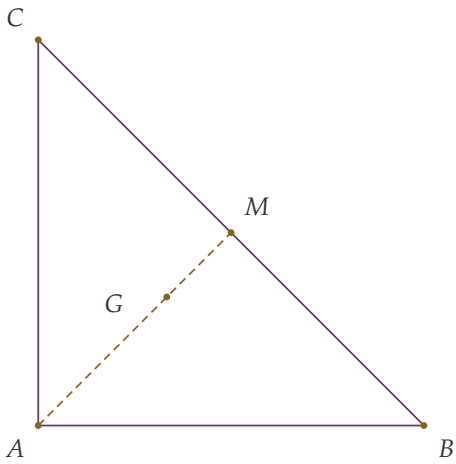


Figura 2.37: Na mediana AM, o segmento AG tem o dobro do comprimento de GM.

A divisão interna e as coordenadas de M dão

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

$$y_G = \frac{y_A + 2y_M}{3} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

As últimas expressões são simétricas em A, B, C.

Repetir a construção a partir de B e de C produz o mesmo ponto. Logo, as três medianas são concorrentes.

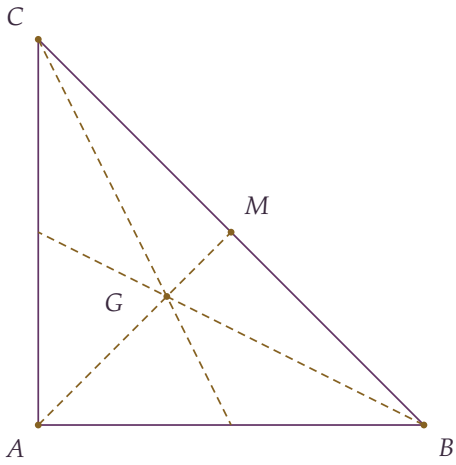


Figura 2.38: As medianas do triângulo $A = (0,0)$, $B = (6,0)$ e $C = (0,6)$ encontram-se em $G = (2,2)$.

As medianas de A e B são retas distintas: se fossem a mesma reta, conteriam A, B e o ponto médio de BC, obrigando também C a estar nela, contra a hipótese de triângulo não degenerado. Portanto, o ponto comum é único. □

A dedução e a razão de divisão são ilustradas na Figura 2.38. A média das coordenadas existe também para três pontos colineares, mas, nesse caso, não caracteriza o encontro único de três medianas de um triângulo.

Exemplo 2.25. *Reconstruir um vértice usando o baricentro*

Um triângulo tem $A = (-2,1)$, $B = (4,1)$ e baricentro $G = (1,3)$. Determine C e confira a razão na mediana que parte de C.

Resolução.
O ponto médio de AB é $M = (1,1)$. A mediana por C passa por $G = (1,3)$ e por M, portanto é a vertical $x = 1$. Além disso, $CG = 2GM$, com G entre C e M. Como $GM = 2$, partimos de G e subimos 4 unidades para encontrar $C = (1,7)$. A razão é $2:1$, com G entre o vértice e o ponto médio, como mostra a Figura 2.39. Como C não está na horizontal AB, a reconstrução produz um triângulo não degenerado.

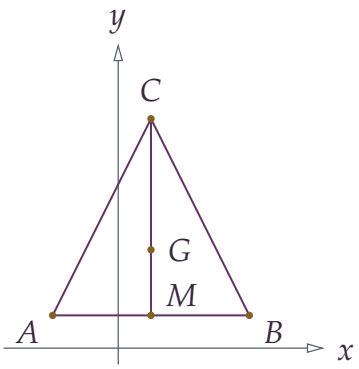


Figura 2.39: O vértice reconstruído é $C = (1,7)$, e a mediana passa por $G = (1,3)$ e $M = (1,1)$.

O baricentro usa três pesos iguais. Podemos descrever outros pontos com pesos diferentes, desde que deixemos claro o significado da escrita: não estamos somando pontos como números, mas formando separadamente médias ponderadas de suas coordenadas.

Teorema 2.11. (Coordenadas baricêntricas normalizadas). *Fixado um triângulo não degenerado ABC, todo ponto P é descrito por um único trio de reais (α, β, γ) com*

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

$$x_P = \alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C,$$

$$y_P = \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C.$$

O ponto pertence ao triângulo, incluindo a borda, exatamente quando os três pesos são não negativos.

Demonstração.
Para provar existência e unicidade, elimine $\alpha = 1 - \beta - \gamma$.

Com $u = x_B - x_A$, $v = y_B - y_A$, $r = x_C - x_A$, $s = y_C - y_A$, $p = x_P - x_A$ e $q = y_P - y_A$, restam

$$u\beta + r\gamma = p, \quad v\beta + s\gamma = q.$$

Escreva $\Delta = us - vr$. Esse determinante é não nulo, pois o triângulo não é degenerado. Multiplicar a primeira igualdade por s e a segunda por r e subtrair dá $\Delta\beta = ps - qr$. Multiplicar a segunda por u e a primeira por v e subtrair dá $\Delta\gamma = uq - vp$. Logo,

$$\beta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix}, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma.$$

Esses valores, substituídos nas duas equações, produzem p e q, porque os termos mistos se cancelam. Assim, existem e são os únicos possíveis.

Resta a posição. Se os pesos são não negativos e $\beta + \gamma > 0$, marque em BC o ponto D cujos pesos nas extremidades são $\frac{\beta}{\beta+\gamma}$ e $\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$. Sua abscissa é $\frac{\beta x_B + \gamma x_C}{\beta+\gamma}$, e o cálculo é idêntico para a ordenada.

Na figura, o maior dos dois pesos corresponde a B, e D fica mais perto desse vértice.

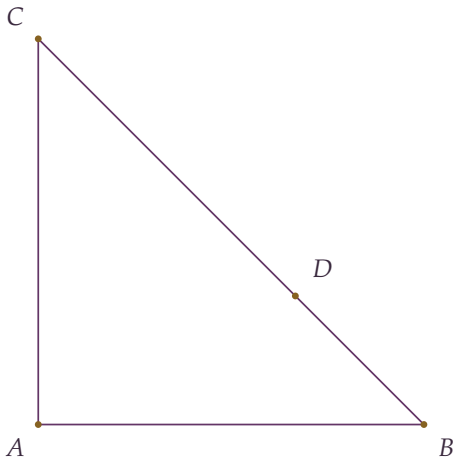


Figura 2.40: A divisão de BC nos pesos $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ determina D.

Escreva $t = \beta + \gamma$. Como $\alpha = 1 - t \geqslant 0$, temos $0 < t \leqslant 1$. Agrupando os termos na abscissa de P, obtemos $x_P = (1-t)x_A + tx_D$. A mesma relação vale para a ordenada. São as coordenadas do ponto que percorreu a fração t de AD.

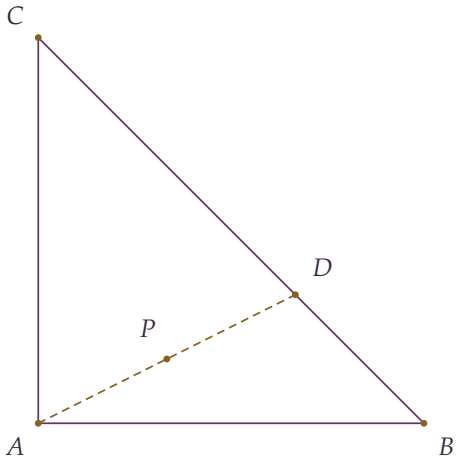


Figura 2.41: Para $A = (0,0)$, $B = (6,0)$ e $C = (0,6)$, os pesos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ dão $P = (2,1)$. Ele está no segmento de A a $D = (4,2)$, em BC.

Logo, está no triângulo. Se $\beta + \gamma = 0$, os pesos não negativos obrigam $\beta = \gamma = 0$, e $P = A$.

Reciprocamente, para P no triângulo e diferente de A, prolongue a semirreta AP até o lado oposto, que ela encontra em D. Se P já estiver em BC, tome $D = P$. Sejam $t = \frac{AP}{AD}$ e $h = \frac{BD}{BC}$. Ambos pertencem a $[0,1]$. As duas divisões sucessivas dão os pesos $1-t$, $t(1-h)$ e th, todos não negativos e de soma 1. Para A, são $(1,0,0)$. A unicidade conclui a caracterização. □

Pesos estritamente positivos correspondem ao interior. Se os demais pesos são não negativos, um peso zero coloca o ponto no lado oposto ao vértice desse peso. Dois pesos zero produzem um vértice.

Exemplo 2.26. *Ler pesos como duas divisões de segmentos*

No triângulo $A=(0,0)$, $B=(6,0)$ e $C=(0,6)$, encontre o ponto de pesos $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ e descreva uma construção por segmentos.

Resolução.
Agrupamos primeiro os pesos de B e C: sua soma é $\frac{1}{2}$ e sua razão é $2:1$. Ao normalizá-los dentro desse lado, obtemos $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Portanto, o ponto auxiliar está a um terço do percurso de B até C: $D=\left(6+\left(\frac{1}{3}\right)(-6),0+\left(\frac{1}{3}\right)6\right)=(4,2)$. O peso de A e a soma dos outros dois são ambos $\frac{1}{2}$; assim, P é o ponto médio de AD, logo $P=(2,1)$, como na Figura 2.42. A conta direta confere $x_P=\left(\frac{1}{3}\right)6=2$ e $y_P=\left(\frac{1}{6}\right)6=1$. Como todos os pesos são positivos, P é interior.

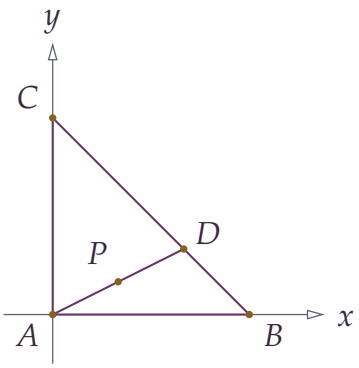


Figura 2.42: $D=(4,2)$ divide BC na razão dos pesos; $P=(2,1)$ é o ponto médio de AD.

Exemplo 2.27. *Um peso negativo revela a posição exterior*

No mesmo triângulo $A=(0,0)$, $B=(6,0)$ e $C=(0,6)$, determine os pesos normalizados de $Q=(4,4)$ e decida se ele pertence ao triângulo.

Resolução.
As coordenadas exigem $6\beta=4$ e $6\gamma=4$, logo $\beta=\gamma=\frac{2}{3}$. A soma dos pesos deve ser 1, de modo que $\alpha=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$. Pelo critério dos sinais dos pesos baricêntricos, Q é exterior, como mostra a Figura 2.43. O ponto médio de BC é $(3,3)$, e Q está além dele no percurso a partir de A. Dar a cada coordenada um valor entre 0 e 6 apenas coloca Q no quadrado que contém o triângulo, não necessariamente no próprio triângulo.

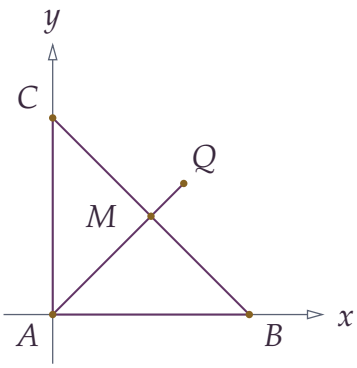


Figura 2.43: $Q = (4, 4)$ está além do ponto médio $M = (3, 3)$ de BC, no percurso que parte de A.

2.9 Exercícios

Distâncias no plano

2.1. Entre $A = (2, -1)$ e $B = (-4, 7)$ há dois percursos: o segmento AB e um caminho que segue primeiro na horizontal e depois na vertical. Determine o ponto em que o segundo caminho muda de direção e calcule quantas unidades se economizam seguindo pelo segmento.

2.2. O ponto $P = (t, 2)$ está a uma distância 5 de $A = (1, -1)$. Determine todos os valores reais de t e as coordenadas dos pontos correspondentes.

Ponto médio

2.3. O ponto $M = (2, -1)$ é o ponto médio de AB, e $A = (-3, 4)$. Determine B e o comprimento de AB.

2.4. Um retângulo tem vértices consecutivos $A = (-2, -1)$, $B = (6, -1)$, $C = (6, 5)$ e $D = (-2, 5)$. Mostre que suas diagonais têm o mesmo ponto médio e determine a distância desse ponto a cada vértice.

Divisão interna de segmentos

2.5. Determine o ponto que divide $A = (-3, 2)$ e $B = (9, -4)$ internamente na razão $AP : PB = 1 : 3$. Confira a razão pelos comprimentos.

2.6. Sabe-se que $A = (1, -2)$, $P = (5, 0)$ e que P divide AB internamente na razão $AP : PB = 2 : 1$. Determine a extremidade B.

2.7. O segmento com extremos $A = (-4, 3)$ e $B = (6, -2)$ encontra o eixo vertical em P. Determine P e a razão $AP : PB$, justificando que o ponto está no segmento.

Divisão externa e razões orientadas

2.8. $+$ Determine o ponto exterior que divide $A = (2, 1)$ e $B = (2, 7)$ na razão de comprimentos $1 : 3$. Indique de qual lado ele fica e confira as distâncias.

2.9. $+$ Fixe $A \neq B$ e oriente a reta de A para B. Para cada real ρ, discuta a existência e a posição de um ponto $P \neq B$ com $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \rho$. Distinga interior, exterior e extremidades. Explique por que $\rho = -1$ não descreve o ponto médio.

Escolha de coordenadas e otimização

2.10. Um triângulo ABC é retângulo em A, com $AB = 8$ e $AC = 6$. Escolha um referencial, determine o ponto médio M da hipotenusa e calcule AM, BM e CM. Justifique por que sua escolha de coordenadas respeita os dados.

2.11. $*$ Sejam $A = (-2, 3)$ e $B = (4, 1)$. Entre todos os pontos P do eixo horizontal, determine o menor valor de $PA^2 + PB^2$ e o ponto em que esse valor é atingido. Justifique que nenhum outro ponto fornece um valor menor.

Colinearidade e posição

2.12. Para $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 4)$, verifique se $C = (0, 2)$ e $D = (6, 5)$ estão na reta AB e quais deles pertencem ao segmento. Determine o parâmetro de cada ponto a partir de A.

2.13. Para quais valores reais de k os pontos $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$ e $C = (k, k + 2)$ são colineares? Existe algum desses valores para o qual os três pontos sejam distintos?

Áreas e escala

2.14. Determine a área do triângulo $A = (-1, -1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (1, 4)$. Compare os determinantes nas ordens A, B, C e C, B, A.

2.15. Para $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (3, k)$, determine todos os valores reais de k que produzem área 4. Identifique também o valor que produz área zero.

2.16. Um polígono tem vértices consecutivos $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 5)$ e $(0, 5)$. Calcule sua área pela soma sobre os lados e confira decompondo a região em retângulos.

2.17. Um triângulo tem vértices de coordenadas $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 4)$ em um referencial cuja unidade vale 2 cm. Determine seus lados e sua área em unidades físicas. Por que multiplicar a área numérica por 2 não seria correto?

Igualdade de distâncias e mediatriz

2.18. Determine uma equação para o conjunto dos pontos equidistantes de $A = (0, 1)$ e $B = (4, 3)$. Encontre o ponto desse conjunto que pertence ao eixo horizontal e confira suas duas distâncias. Justifique a recíproca da equação obtida.

Identidade de Apolônio

2.19. + Sejam $A = (-3, 0)$ e $B = (3, 0)$. Determine o conjunto de todos os pontos P do plano tais que $PA^2 + PB^2 = 50$. Mostre também que todo ponto do conjunto descrito satisfaz a igualdade.

Baricentro e coordenadas baricêntricas

2.20. + Os pontos $A = (-3, 0)$ e $B = (2, 1)$ são vértices de um triângulo cujo baricentro é $G = (-1, 2)$. Determine o terceiro vértice e verifique que os dados formam um triângulo não degenerado.

2.21. + Para o triângulo $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ e $C = (0, 4)$, determine os pesos baricêntricos normalizados de $P = (t, 1)$, para todo real t. Quais valores colocam P no interior, na borda e no exterior do triângulo?

2.22. +* Prove que as três medianas dividem qualquer triângulo não degenerado em seis triângulos de áreas iguais. Construa a prova a partir de um referencial apropriado, da fórmula do baricentro e da área por base e altura.

2.10 Soluções dos exercícios

Distâncias no plano

Exercício 2.1.

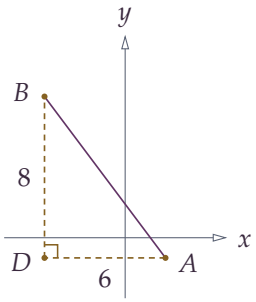


Figura 2.44: O caminho por D mede $6 + 8$, e o segmento AB mede 10

Os comprimentos dos deslocamentos horizontal e vertical são $|-4 - 2| = 6$ e $|7 + 1| = 8$. Pela fórmula da distância,

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

O caminho horizontal sai de A mantendo $y = -1$ e precisa terminar no alinhamento vertical de B, onde $x = -4$. Logo muda de direção em $D = (-4, -1)$. O trecho para a esquerda mede 6, e a subida mede 8. Pelo segmento percorremos 10 unidades em vez de $6 + 8 = 14$, uma economia de 4 unidades.

Exercício 2.2.

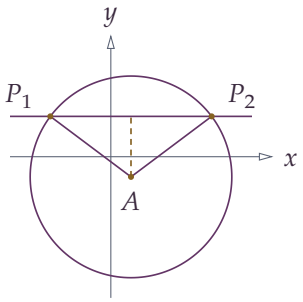


Figura 2.45: Duas interseções com a horizontal permitida

A diferença das ordenadas é fixa e vale $2 - (-1) = 3$. Assim, a condição $PA = 5$ equivale a

$$\sqrt{(t-1)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow (t-1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 16.$$

A elevação ao quadrado é reversível porque os dois lados são não negativos. Como $u^2 = 16$ equivale a $u = 4$ ou $u = -4$, temos $t - 1 = 4$ ou $t - 1 = -4$. Portanto, $t = 5$ ou $t = -3$, e os pontos são $(5, 2)$ e $(-3, 2)$. Em ambos os casos, as diferenças de coordenadas têm quadrados 16 e 9, logo a distância é $\sqrt{25} = 5$. Como examinamos os dois sinais e as passagens são reversíveis, não há outras soluções.

Ponto médio

Exercício 2.3.

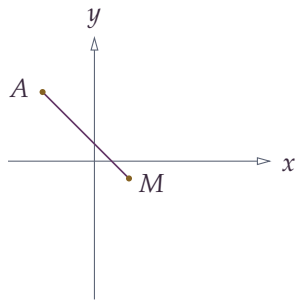


Figura 2.46: Dados: uma extremidade e o ponto médio

O ponto médio permite calcular cada coordenada da extremidade desconhecida. Se $B = (u, v)$, então

$$\frac{-3+u}{2} = 2 \Rightarrow u = 7, \quad \frac{4+v}{2} = -1 \Rightarrow v = -6.$$

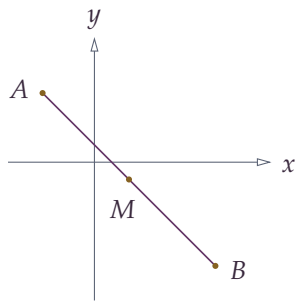


Figura 2.47: Completar o segmento com o mesmo deslocamento

Logo, $B = (7, -6)$. A média das coordenadas de A e desse ponto é $(2, -1)$, como exigido. A distância é

$$AB = \sqrt{(7+3)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}.$$

Exercício 2.4.

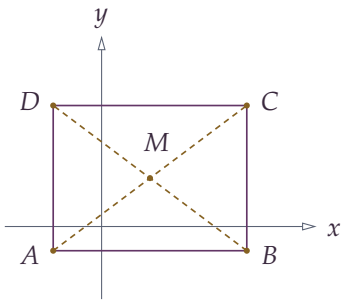


Figura 2.48: As duas diagonais do retângulo dado

De $A = (-2, -1)$ até $C = (6, 5)$, as variações são $(8, 6)$. Fazer metade de cada uma localiza o ponto médio $M = (-2+4, -1+3) = (2, 2)$. De $B = (6, -1)$ até $D = (-2, 5)$, as variações são $(-8, 6)$; suas metades dão $N = (6-4, -1+3) = (2, 2)$. Portanto, as diagonais têm o mesmo ponto médio. De $(2, 2)$ a qualquer vértice, as diferenças de coordenadas

têm valores absolutos 4 e 3. Assim, as quatro distâncias são $\sqrt{4^2+3^2}=5$. A igualdade dos pontos médios foi obtida pelas duas coordenadas; a igualdade das distâncias é uma conclusão adicional.

Divisão interna de segmentos

Exercício 2.5.

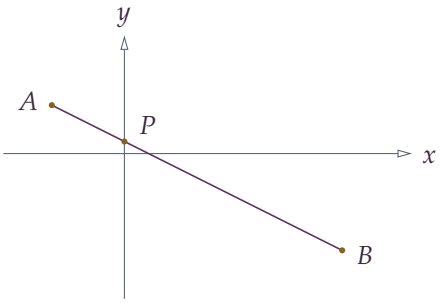


Figura 2.49: Uma parte de quatro no percurso inteiro

O percurso inteiro corresponde a $1+3=4$ partes; portanto, $t=\frac{1}{4}$. De A até B, as variações são 12 e -6. A partir de A, fazemos um quarto de cada uma:

$$P=\left(-3+\left(\frac{1}{4}\right)12, 2+\left(\frac{1}{4}\right)(-6)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

As diferenças de coordenadas de A a P são $\left(3,-\frac{3}{2}\right)$, e de P a B, $\left(9,-\frac{9}{2}\right)$. Pela fórmula da distância, $AP=3\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $PB=9\frac{\sqrt{5}}{2}$. A razão é $1:3$, e $0<t<1$ confirma a posição interior.

Exercício 2.6.

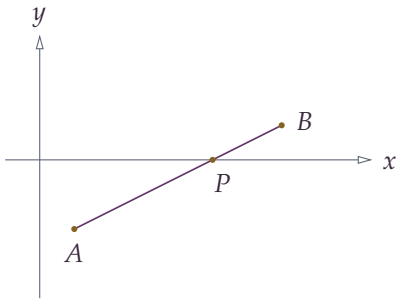


Figura 2.50: Reconstruir o trecho que falta depois de P

A razão interna $2:1$ reparte o percurso em três partes iguais. O trecho de A até P ocupa duas delas, portanto cada variação de coordenada até P é dois terços da variação total. Se $B=(u,v)$, então

$$5=1+\left(\frac{2}{3}\right)(u-1),\quad 0=-2+\left(\frac{2}{3}\right)(v+2).$$

A primeira igualdade dá $u-1=6$, e a segunda, $v+2=3$. Portanto, $B=(7,1)$. Os deslocamentos de A a P são $(4,2)$, e de P a B, $(2,1)$; têm o mesmo sentido e comprimentos na razão $2:1$. Isso confere também a posição interna.

Exercício 2.7.

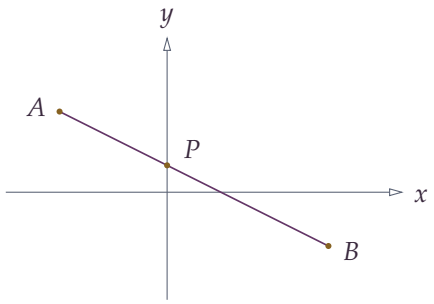


Figura 2.51: A abscissa zero escolhe a fração do percurso

O eixo vertical exige abscissa zero. Em vez de começar pela razão desconhecida, escrevemos as coordenadas do percurso:

$$P = (-4 + 10t, 3 - 5t).$$

Da condição $-4 + 10t = 0$, vem $t = \frac{2}{5}$. A ordenada é $3 - 2 = 1$, logo $P = (0, 1)$. Como $0 < \frac{2}{5} < 1$, a interseção está no segmento. A parte restante corresponde a $\frac{3}{5}$ do comprimento, de modo que $AP : PB = 2 : 3$. A abscissa depende de t com coeficiente não nulo, por isso a interseção é única.

Divisão externa e razões orientadas

Exercício 2.8. +

A razão $PA : PB = 1 : 3$ exige $PB > PA$, portanto o ponto exterior fica antes de A, no prolongamento oposto a B.

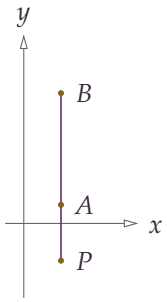


Figura 2.52: A divisão exterior fica antes de A

Como A está entre P e B, temos $PB = PA + AB$. Substituindo $PB = 3PA$ e subtraindo PA, encontramos $2PA = AB = 6$. Logo, $PA = 3$. A reta AB é vertical, com abscissa 2; a partir de $A = (2, 1)$, descemos três unidades e chegamos a $P = (2, -2)$. As distâncias verticais são $PA = 3$ e $PB = 9$, confirmando $1 : 3$.

Exercício 2.9. +

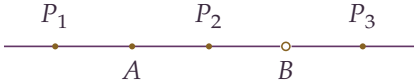


Figura 2.53: Posições de referência para cada sinal de ρ

Para identificar o papel do parâmetro, escrevemos o deslocamento orientado de A até P como tAB. O restante, de P até B, é $(1-t)AB$. Como $P \neq B$, temos $t \neq 1$; dividir os dois deslocamentos e cancelar $AB > 0$ dá $\rho = \frac{t}{1-t}$. Para $\rho = -1$, a equação exigiria $t = t - 1$, impossível. Para todo outro valor, há um único $t = \frac{\rho}{1+\rho}$, sempre diferente de 1, e, portanto, um único ponto $P \neq B$.

Se $\rho > 0$, então $0 < t < 1$, e o ponto é interior. Se $\rho = 0$, então $t = 0$ e $P = A$. Se $\rho < -1$, o denominador é negativo e $t = 1 - \frac{1}{1+\rho} > 1$, dando um ponto além de B. Se $-1 < \rho < 0$, então $t < 0$, dando um ponto antes de A. Os casos cobrem todos os reais. O ponto médio tem $t = \frac{1}{2}$ e razão orientada 1, não -1: nele os percursos de A a P e de P a B têm o mesmo sentido.

Escolha de coordenadas e otimização

Exercício 2.10.
Colocamos $A = (0,0)$, o eixo horizontal na direção de AB e o vertical na direção de AC. Como os catetos são perpendiculares, os eixos também são.

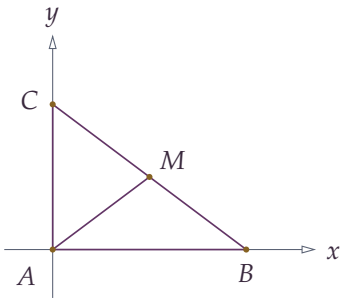


Figura 2.54: Um referencial sobre os catetos perpendiculares

Escolhendo os sentidos positivos para os outros vértices e preservando a unidade, obtemos $B = (8,0)$ e $C = (0,6)$.

O ponto médio da hipotenusa é $M = (4,3)$. Pela fórmula da distância,

$$AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$BM = \sqrt{(4-8)^2 + 3^2} = 5,$$

$$CM = \sqrt{4^2 + (3-6)^2} = 5.$$

Assim, o ponto médio da hipotenusa está à mesma distância dos três vértices. A hipotenusa mede $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, e cada distância obtida é metade desse comprimento.

Exercício 2.11. *
Como P pertence ao eixo horizontal, tomamos $P = (x,0)$, com x real.

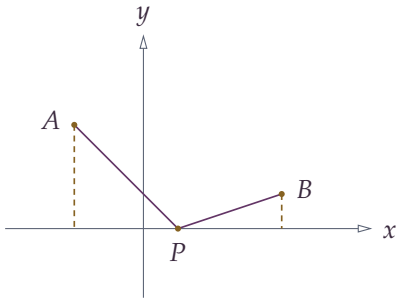


Figura 2.55: O ponto variável está no eixo, não no segmento AB

A soma dos quadrados das distâncias é

$$PA^2 + PB^2 = (x+2)^2 + 3^2 + (x-4)^2 + 1^2 = 2x^2 - 4x + 30.$$

Para localizar o menor valor, colocamos 2 em evidência nos termos que contêm x. Dentro dos parênteses, falta 1 a $x^2 - 2x$ para obter $(x-1)^2$. Destinamos a esse quadrado duas das 30 unidades constantes:

$$2x^2 - 4x + 30 = 2\big(x^2 - 2x + 1\big) + 28 = 2(x-1)^2 + 28.$$

Como $(x-1)^2 \geqslant 0$, a soma é sempre pelo menos 28. Esse valor é atingido quando $x = 1$, e somente nesse caso. Portanto, o mínimo é 28, no ponto $P = (1, 0)$. Conferindo nesse ponto, temos $PA^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18$ e $PB^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$, cuja soma é 28.

Colinearidade e posição

Exercício 2.12.
De A a B, as diferenças são $(6, 3)$.

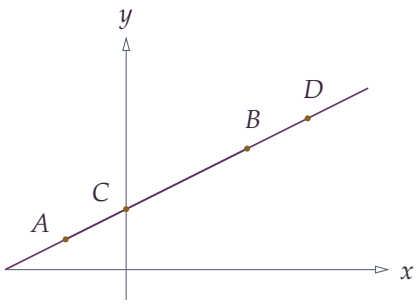


Figura 2.56: Estar na reta e estar no segmento são condições distintas

De A a C, são $(2, 1)$; de A a D, são $(8, 4)$. O determinante dos deslocamentos é zero em ambos os casos: $6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$ e $6 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 0$. Logo, ambos pertencem à reta.

Os parâmetros são $t_C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $t_D = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, confirmados também pelas ordenadas. Somente C pertence ao segmento; D está além de B. A condição adicional $0 \leqslant t \leqslant 1$ é o que distingue os dois casos.

Exercício 2.13.

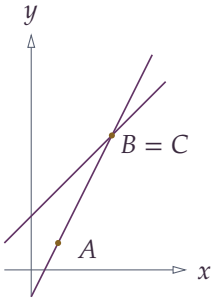


Figura 2.57: O único alinhamento força uma coincidência

Como $A \neq B$, esses pontos determinam uma reta. Para que C pertença a ela, o determinante dos deslocamentos de A até B e de A até C deve ser zero. Os deslocamentos são $(2, 4)$ e $(k-1, k+1)$, logo

$$D = 2(k+1) - 4(k-1) = 6 - 2k.$$

Assim, o alinhamento ocorre somente para $k = 3$. Mas então $C = (3, 5) = B$. Não existe valor que produza três pontos distintos e colineares. O determinante zero inclui coincidências; a exigência de distinção é outra condição, que deve ser conferida depois.

Áreas e escala

Exercício 2.14.

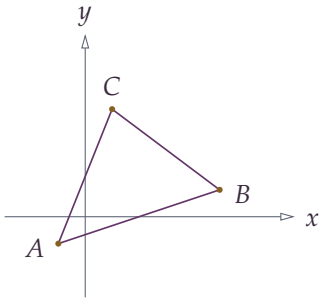


Figura 2.58: A mesma região pode ser percorrida nos dois sentidos

A partir de A, os deslocamentos são $(6, 2)$ e $(2, 5)$. O determinante desses dois pares vale $D = 6 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 26$. A área é metade de seu módulo, logo vale 13. Na ordem C, B, A, usamos os deslocamentos $(4, -3)$ e $(-2, -5)$ a partir de C: o determinante é $4(-5) - (-3)(-2) = -26$. A ordem troca o sinal, mas ambos os módulos fornecem área 13.

Exercício 2.15.
A base AB é oblíqua.

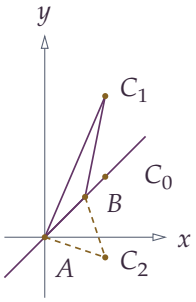


Figura 2.59: Os dois lados da reta de base produzem a mesma área

Para expressar a área sem calcular uma altura desconhecida, tomamos a metade do módulo do determinante dos deslocamentos a partir de um vértice. Como $A = (0,0)$, as diferenças de coordenadas até B e até C são os próprios pares $(2,2)$ e $(3,k)$:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 2k - 2 \cdot 3 = 2k - 6.$$

A área é $\frac{|2k-6|}{2} = |k-3|$. Pedir área 4 equivale a $k-3 = 4$ ou $k-3 = -4$, de onde $k = 7$ ou $k = -1$. A substituição dá determinantes 8 e -8, ambos com metade do módulo igual a 4. A área é zero apenas em $k = 3$, quando $C = (3,3)$ está no prolongamento de AB.

Exercício 2.16.

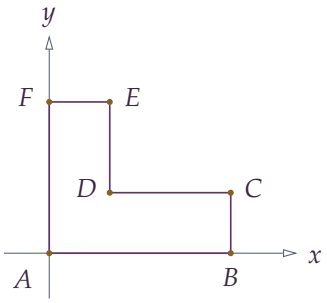


Figura 2.60: Respeitar a reentrância e a ordem da borda

Nomeamos os vértices dados A, B, C, D, E, F, nessa ordem, como na figura. Para cada lado, escrevemos as coordenadas do ponto de partida na primeira linha e as do ponto de chegada na segunda. Por exemplo, no lado CD,

$$D_{CD} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 8.$$

Mantendo a ordem da borda e fechando-a com FA, as parcelas de AB, BC, CD, DE, EF e FA são, respectivamente, 0, 12, 8, 6, 10 e 0. Somamos essas parcelas com seus sinais antes de tomar a metade do módulo:

$$S = \frac{1}{2}|0 + 12 + 8 + 6 + 10 + 0| = \frac{36}{2} = 18.$$

A região também é a união, sem sobreposição de interiores, de um retângulo de largura 6 e altura 2 com outro de largura 2 e altura 3, acima do primeiro e junto de sua borda esquerda.

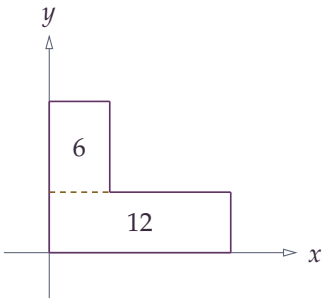


Figura 2.61: Conferir a área por dois retângulos

Suas áreas são 12 e 6, totalizando 18. Essa decomposição confere a região côncava efetivamente descrita pelos dados.

Exercício 2.17.
Os catetos acompanham os eixos. Em unidades do referencial, medem 3 e 4, e a hipotenusa mede $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Como uma unidade vale 2 cm, os lados físicos medem 6 cm, 8 cm e 10 cm.

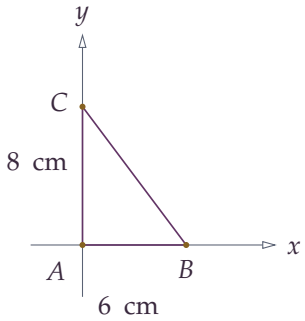


Figura 2.62: Uma unidade vale dois centímetros em cada eixo

A área numérica é $3 \cdot \frac{4}{2} = 6$ unidades quadradas; cada unidade quadrada corresponde a um quadrado de lado 2 cm e área 4 cm². Portanto, a área física é 24 cm², também obtida por $6 \cdot \frac{8}{2}$.

Multiplicar somente por 2 corrigiria uma única dimensão. A escala altera tanto a base quanto a altura; o fator de área é o quadrado do fator de comprimento.

Igualdade de distâncias e mediatriz

Exercício 2.18.

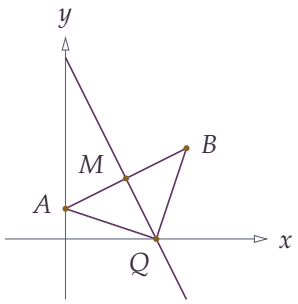


Figura 2.63: Igualdade de distâncias e interseção com o eixo

Para $P = (x, y)$, a não negatividade das distâncias permite a cadeia de equivalências

$$PA = PB \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2.$$

Expandindo e cancelando os termos quadráticos,

$$-2y + 1 = -8x - 6y + 25 \Leftrightarrow 8x + 4y = 24 \Leftrightarrow 2x + y = 6.$$

Assim, a mediatriz é a reta $2x + y = 6$. No eixo horizontal, $y = 0$, de modo que $x = 3$. O ponto procurado é $Q = (3, 0)$, para o qual

$$QA = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \quad QB = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Reciprocamente, todo ponto da reta $2x + y = 6$ satisfaz a igualdade dos quadrados das distâncias pelas mesmas operações em ordem inversa. Como as distâncias são não negativas, elas são iguais. A equação descreve, portanto, todos os pontos pedidos.

Identidade de Apolônio

Exercício 2.19. +

Os pontos fixos são simétricos em relação a $M = (0, 0)$ e distam 6 entre si. Queremos descrever uma soma de quadrados de distâncias; a identidade de Apolônio é adequada porque a troca por uma única distância ao ponto médio.

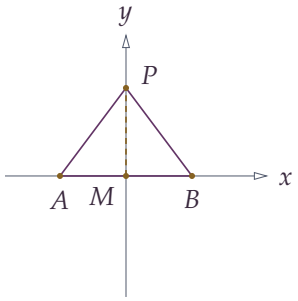


Figura 2.64: A soma de quadrados pode usar o ponto médio

Na identidade de Apolônio, substituímos o comprimento $AB = 6$ e obtemos

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + \frac{6^2}{2} = 2PM^2 + 18.$$

Logo, a condição do enunciado equivale a $2PM^2 + 18 = 50$, isto é, $PM^2 = 16$. Como $PM \geqslant 0$, ela equivale a $PM = 4$. O lugar é a circunferência de centro $M = (0, 0)$ e raio 4, isto é, o conjunto de todos os pontos a essa distância de M. Em coordenadas, sua equação é $x^2 + y^2 = 16$.

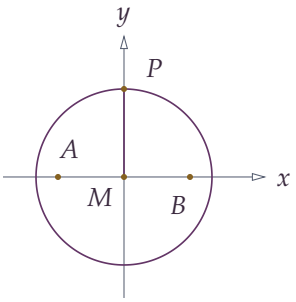


Figura 2.65: A distância fixa ao ponto médio descreve o lugar inteiro

Para a recíproca, tome qualquer ponto dessa circunferência. Sua distância a M é 4; a identidade fornece $PA^2 + PB^2 = 2 \cdot 16 + 18 = 50$. Todos os seus pontos satisfazem a condição, sem excluir nenhum deles.

Baricentro e coordenadas baricêntricas

Exercício 2.20. +

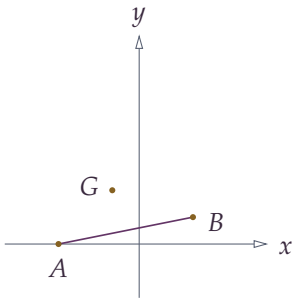


Figura 2.66: Dois vértices e o baricentro conhecidos

Os dados são $A = (-3, 0)$, $B = (2, 1)$ e $G = (-1, 2)$; procuramos o vértice C. Primeiro localizamos o ponto médio de AB, que é $M = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. A mediana CM deve conter G, com $CG = 2GM$ e G entre C e M. De M até G, as variações são $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; repetindo-as duas vezes depois de G, obtemos

$$C = \left(-1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right), 2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)\right) = (-2, 5).$$

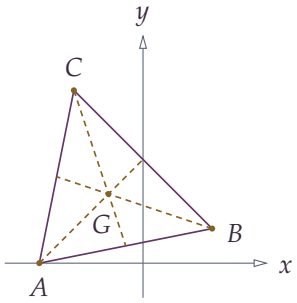


Figura 2.67: O terceiro vértice completa as três medianas

Para conferir que os vértices não estão na mesma reta, os deslocamentos a partir de A são $(5,1)$ e $(1,5)$; seu determinante vale $25-1=24\neq 0$. As coordenadas médias dos três vértices são, de fato, $(-1,2)$.

Exercício 2.21. +

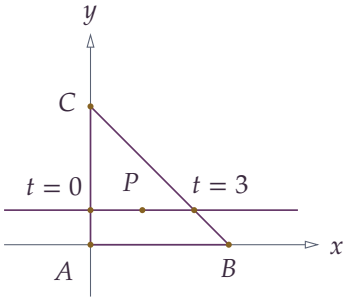


Figura 2.68: A horizontal encontra interior, borda e exterior

Os pesos desconhecidos são os de $A=(0,0)$, $B=(4,0)$ e $C=(0,4)$ para representar $P=(t,1)$. A abscissa recebe contribuição apenas de B, e a ordenada, apenas de C. Por isso, os pesos devem satisfazer $4\beta=t$, $4\gamma=1$ e $\alpha+\beta+\gamma=1$. Portanto,

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{3-t}{4},\frac{t}{4},\frac{1}{4}\right).$$

Os três pesos são positivos exatamente quando $0<t<3$, que é o caso interior. Para $t=0$ ou $t=3$, um peso se anula e os outros são positivos: os pontos $(0,1)$ e $(3,1)$ pertencem à borda. Para $t<0$, o peso de B é negativo; para $t>3$, o peso de A é negativo. Esses são os casos exteriores. Não há vértices nessa família, pois a ordenada foi fixada em 1.

Exercício 2.22. +*
Precisamos comparar áreas, de modo que convém tornar um lado horizontal.

Tomamos $A = (0,0)$, $B = (b,0)$ e $C = (u,h)$, com $b, h > 0$. Não impomos valor a u: o triângulo pode ser oblíquo. Sua área é $S = b\frac{h}{2}$.

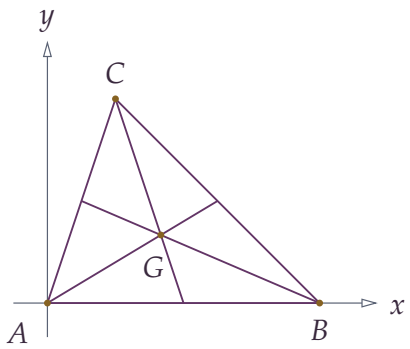


Figura 2.69: As três medianas e as seis regiões

Tomando a média das abscissas e a média das ordenadas dos vértices, obtemos $G = \left(\frac{b+u}{3}, \frac{h}{3}\right)$. O triângulo ABG tem a mesma base b e altura $\frac{h}{3}$, portanto área $b\frac{h}{6} = \frac{S}{3}$. O argumento não usou uma propriedade especial do lado AB. Escolher sucessivamente BC e CA como bases mostra que $[BCG] = [CAG] = \frac{S}{3}$.

Seja N o ponto médio de AB. O segmento GN divide o triângulo ABG em dois.

Os triângulos ANG e NBG têm bases iguais, $\frac{b}{2}$, sobre a mesma reta, e a mesma altura a partir de G.

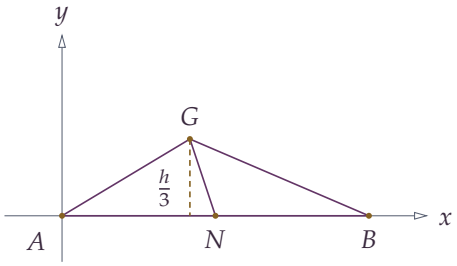


Figura 2.70: Mesma altura, duas bases iguais

Cada um tem metade da área de ABG, isto é, $\frac{S}{6}$. O mesmo ocorre nos outros dois lados.

Como G é interior e pertence às três medianas, esses seis triângulos cobrem o triângulo original sem sobreposição de interiores. Assim, são exatamente as seis partes pedidas, todas com área $\frac{S}{6}$.

Capítulo 3

Retas e sistemas lineares

Dois pontos distintos bastam para traçar uma reta com a régua. Quando os pontos são dados por suas coordenadas, convém escrever uma equação que permita verificar se um terceiro ponto pertence à mesma reta. Se quisermos localizar o cruzamento de duas retas, as coordenadas procuradas deverão satisfazer as duas equações ao mesmo tempo.

3.1 Uma equação para uma reta

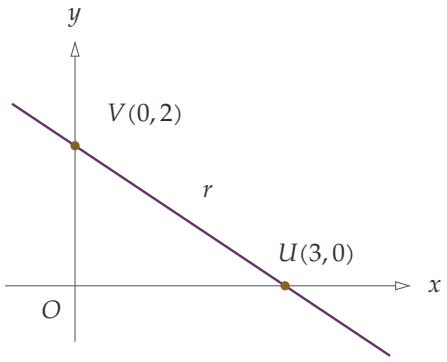
Considere a condição $2x + 3y = 6$. Fixada a abscissa, a ordenada é determinada: $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Os pontos $(0, 2)$ e $(3, 0)$ satisfazem a condição; não são, porém, seus únicos pontos. Precisamos justificar por que o conjunto completo é uma reta.

Teorema 3.1. (Equação geral). *A condição*

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0),$$

representa uma reta. Se $B \neq 0$, ela pode ser escrita como $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$. Se $B = 0$, necessariamente $A \neq 0$, e a reta é vertical: $x = \frac{-C}{A}$.

Demonstração.
Suponha $B \neq 0$. Dividir por B transforma a equação em $y = mx + b$, com $m = \frac{-A}{B}$ e $b = \frac{-C}{B}$. Para identificar todos os pontos, parta de $(0, b)$ e use a abscissa t como parâmetro. O ponto correspondente é $(t, b + mt)$, cujos deslocamentos a partir de $(0, b)$ são t vezes o par $(1, m)$.
A figura mostra o caso $b = 2$, $m = \frac{-2}{3}$.



$2x + 3y - 6 = 0$

Figura 3.1: A mesma condição seleciona todos os pontos da reta, incluindo os dois pontos marcados sobre os eixos.

O critério de colinearidade do capítulo 2 mostra que esses são exatamente os pontos da reta por $(0, b)$ e $(1, b + m)$. Cada abscissa real ocorre, inclusive quando $m = 0$, caso em que a ordenada permanece igual a b. Se $B = 0$, a hipótese $(A, B) \neq (0, 0)$ garante $A \neq 0$. A condição passa a $x = \frac{-C}{A}$, com ordenada livre, descrevendo a vertical inteira. □

Se $A = B = 0$, a condição deixa de depender de x e y. Quando também $C = 0$, ela é verdadeira para todo ponto do plano; quando $C \neq 0$, não há ponto que a satisfaça. Nenhum desses conjuntos é uma reta. Em sentido inverso, toda reta admite uma equação geral: uma vertical tem equação $x - a = 0$; uma não vertical tem a forma $y = mx + b$, obtida pela razão constante entre suas variações, como veremos a seguir.

Exemplo 3.1. *Distinguir reta, plano inteiro e conjunto vazio*

Descreva os conjuntos definidos por $2x - 3y = 6$, $4x = 8$, $0x + 0y = 0$ e $0x + 0y = 5$.

Resolução.
Na primeira condição há coeficientes não nulos de coordenadas; isolando y, obtemos $y = \frac{2}{3}x - 2$, uma reta oblíqua. A segunda exige apenas $x = 2$: a ordenada é livre, de modo que temos uma vertical, não o ponto $(2, 0)$.
O desenho reúne a reta oblíqua e a vertical.

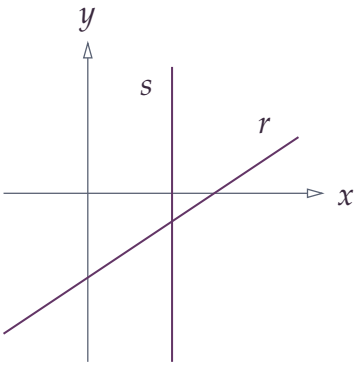


Figura 3.2: As duas primeiras condições dão $r : 2x - 3y = 6$ e $s : x = 2$. As igualdades $0 = 0$ e $0 = 5$ descrevem, respectivamente, o plano inteiro e o conjunto vazio.

Nas duas últimas condições, os coeficientes de x e y são nulos. A igualdade $0 = 0$ vale para todo par real e, portanto, descreve o plano inteiro; $0 = 5$ não vale para nenhum par e descreve o conjunto vazio.

Multiplicar uma equação por um número real não nulo conserva exatamente os pontos que a satisfazem. Assim, uma reta não possui uma única tripla de coeficientes. Multiplicar por zero apagaria a condição e produziria o plano inteiro.

Exemplo 3.2. *Equações diferentes e a mesma reta*

Compare $r : 2x + 3y = 6$, $s : 4x + 6y = 12$ e $u : 4x + 6y = 6$.

Resolução.
Dividir a equação de s por 2 produz exatamente a de r. A operação é reversível, logo as duas condições definem o mesmo conjunto.

A mesma divisão transforma u em $2x + 3y = 3$, que não é a condição anterior. Por exemplo, o ponto $(3, 0)$ da Figura 3.3 pertence a r e a s, mas não a u. Mais adiante, veremos que u é paralela a r. Aqui, o contraexemplo já basta para distinguir os conjuntos.

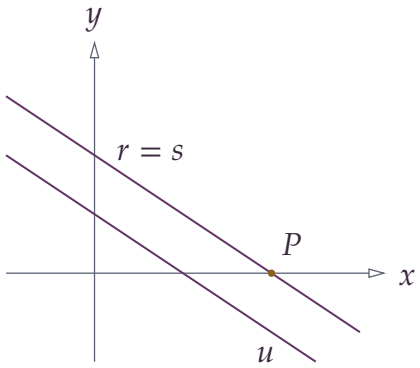


Figura 3.3: r e s coincidem. A paralela u não contém $P = (3, 0)$.

Exemplo 3.3. *Uma condição que reúne duas retas*

A igualdade $x(y - 1) = 0$ é uma equação de uma única reta?

Resolução.
Um produto real é zero quando pelo menos um fator é zero. Os pontos procurados satisfazem $x = 0$ ou $y = 1$: formam a união de uma vertical com uma horizontal. Ambas estão representadas na Figura 3.4.

Esse conjunto não é uma reta. Ele contém $(0, 0)$ e $(0, 2)$, que determinam a vertical $x = 0$, mas também contém $(1, 1)$, fora dessa vertical. Uma equação em duas coordenadas precisa ser examinada antes de receber o nome de reta.

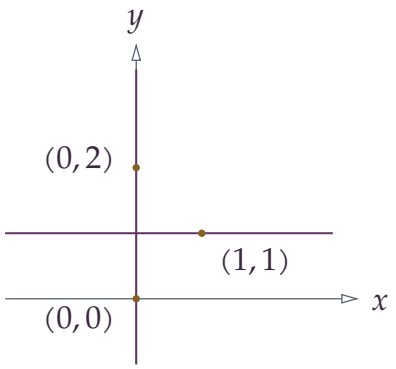


Figura 3.4: O conjunto reúne as retas $x = 0$ e $y = 1$; o ponto $(1, 1)$ impede que ele seja apenas a reta vertical.

3.2 Variações, coeficiente angular e inclinação

Em uma reta não vertical, escolha dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. As **variações** de coordenadas, no percurso de P para Q, são $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$. São números com sinal, não comprimentos. Como uma vertical não pode encontrar essa reta em dois pontos distintos, temos $x_2 \neq x_1$.

Definição 3.2. (Coeficiente angular). Para uma reta não vertical, o número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

é seu **coeficiente angular**. Ele independe dos pontos distintos escolhidos.

Demonstração.
Por que podemos falar no coeficiente angular *da reta*, se usamos dois pontos para calculá-lo? Vamos ver o que acontece quando trocamos um deles e depois justificar por que a razão é a mesma para qualquer par.
Tomemos $P = (2, 1)$ e $Q = (6, 3)$. Para ir de P a Q, podemos primeiro avançar até $D = (6, 1)$ e depois subir até Q. Avançamos $6 - 2 = 4$ unidades e subimos $3 - 1 = 2$. A razão entre a subida e o avanço é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

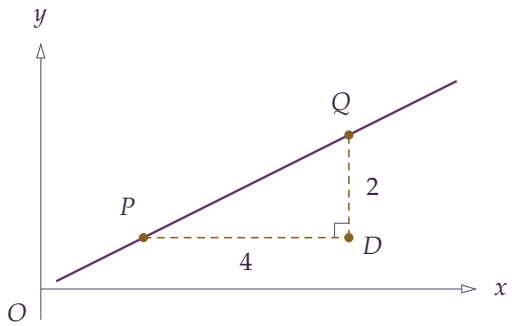


Figura 3.5: O ponto $D = (6, 1)$ separa o avanço horizontal $PD = 4$ da subida $DQ = 2$.

Escolhamos agora $R = (4, 2)$ na mesma reta. Até R, o avanço é $4 - 2 = 2$ e a subida é $2 - 1 = 1$. Por que encontramos outra vez $\frac{1}{2}$?

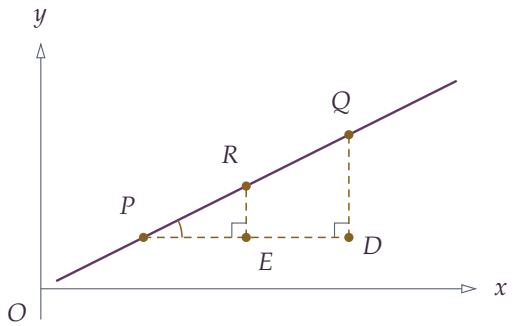


Figura 3.6: Os triângulos PER e PDQ têm o mesmo ângulo em P e ângulos retos em E e D.

Os dois triângulos são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Por isso, a razão entre o cateto vertical e o horizontal é a mesma em ambos, ou seja, $\frac{ER}{PE} = \frac{DQ}{PD}$. Nesta figura, ao dobrar o avanço, dobramos também a subida.

Podemos verificar de uma só vez o que acontece para dois pontos quaisquer, mesmo quando a reta é decrescente. Fixe dois pontos distintos da reta, com variações (u, v) entre eles. Temos $u \neq 0$, pois a reta não é vertical. Pelo critério de colinearidade, os deslocamentos do primeiro ponto fixo até dois pontos quaisquer da reta são (t_1u, t_1v) e (t_2u, t_2v). Subtraindo, obtemos entre esses dois pontos as variações $(t_2 - t_1)u$ e $(t_2 - t_1)v$. Se os pontos são distintos, $t_2 \neq t_1$ e o quociente da segunda variação pela primeira é sempre $\frac{v}{u}$. □

Se $m > 0$, as ordenadas aumentam quando as abscissas aumentam; se $m < 0$, diminuem. A afirmação usa a comparação de abscissas em ordem crescente. Para uma reta vertical, a diferença de abscissas é zero, e o coeficiente angular não está definido. Não lhe atribuímos um número real muito grande nem um valor chamado infinito.

Exemplo 3.4. *A ordem dos pontos e a razão entre as variações*

Calcule o coeficiente angular da reta por $P = (2, 1)$ e $Q = (6, 3)$. Verifique se $R = (8, 4)$ pertence a ela.

Resolução.
De P para Q, temos $m = \frac{3-1}{6-2} = \frac{1}{2}$. De Q para P, a razão é $\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, o mesmo valor.

De P para R, as variações são 6 e 3, também na razão $\frac{1}{2}$. Assim, R está na reta não vertical por P com essa razão de variações. A verificação pela equação é $4 - 1 = \frac{8-2}{2}$.

A razão compara quanto se sobe com quanto se avança; não compara diretamente a distância entre os pontos com uma coordenada.

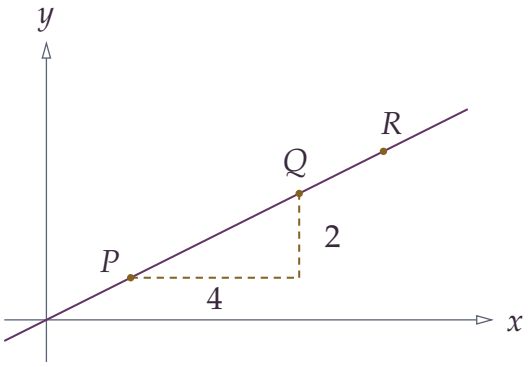


Figura 3.7: De P para Q, o avanço é 4 e a subida é 2. De P para R, esses valores passam a 6 e 3, mantendo a razão $\frac{1}{2}$.

Exemplo 3.5. *Quando dois pontos têm a mesma abscissa*

Determine a reta por $P = (-2, 1)$ e $Q = (-2, 5)$. O que mudaria se os dois pontos dados fossem P?

Resolução.
Os pontos distintos estão na vertical $x = -2$, representada na Figura 3.8. A ordenada não é fixa, pois os dois pontos já têm ordenadas diferentes. Dividir $5 - 1$ por $-2 - (-2)$ seria dividir por zero; não é uma maneira de obter um coeficiente angular. A abscissa é a mesma ao longo de toda a reta.

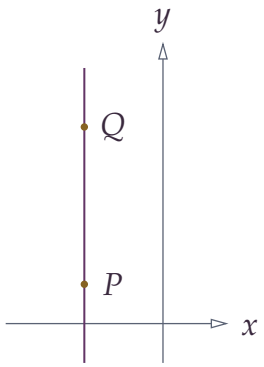


Figura 3.8: Os pontos $P = (-2, 1)$ e $Q = (-2, 5)$ determinam a vertical $x = -2$.

Se os dados fossem duas cópias de P, haveria apenas um ponto conhecido. Toda reta por ele atenderia aos dados, portanto não haveria determinação única. A hipótese de pontos distintos é essencial.

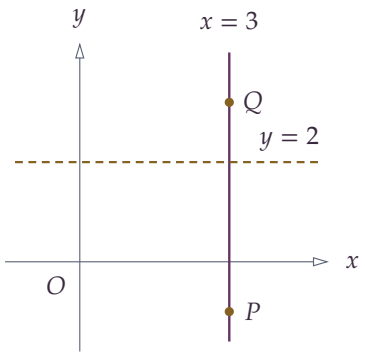


Figura 3.9: Fixar a abscissa em 3 e deixar a ordenada livre dá a vertical por P e Q. Fixar a ordenada em 2 e deixar a abscissa livre dá a horizontal tracejada.

Para relacionar m a um ângulo, precisamos fixar a convenção. A **inclinação** α de uma reta é o ângulo, contado no sentido anti-horário a partir do semieixo horizontal positivo, até a direção da reta, com $0° \leqslant \alpha < 180°$. Escolhe-se, portanto, a direção que aponta para o semiplano superior; para uma horizontal, adota-se $\alpha = 0°$.

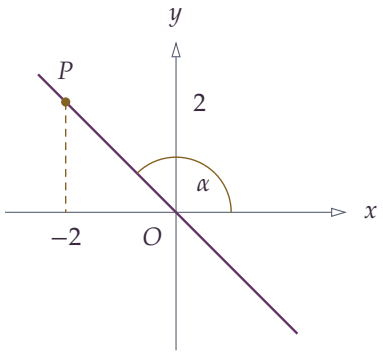
Em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o adjacente. Usaremos $\operatorname{tg}(0°) = 0$. Para $90° < \alpha < 180°$, estendemos a tangente por $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180° - \alpha)$: a direção superior agora aponta para a esquerda, de modo que sua variação horizontal é negativa. Em $90°$, a tangente não está definida.

Proposição 3.3. (Inclinação e coeficiente angular). *Para uma reta não vertical de inclinação α,*

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Uma horizontal tem $\alpha = 0°$ e $m = 0$; uma vertical tem $\alpha = 90°$ e não possui coeficiente angular.

Demonstração.
Percorra a reta oblíqua no sentido em que a ordenada cresce. Se α é agudo, a abscissa também cresce. Os dois deslocamentos são positivos e a razão vertical sobre horizontal é a tangente de α.
Se α é obtuso, a abscissa diminui. No desenho, o percurso de O a P sobe duas unidades e recua duas na horizontal.



$\alpha = 135°, \quad m = -1$

Figura 3.10: A reta decresce para a direita. Sua direção superior forma 135° com o semieixo horizontal positivo.

O ângulo agudo do triângulo com a horizontal é $180° - \alpha$. A razão dos comprimentos dos catetos vale $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, enquanto o quociente das variações tem sinal negativo. Pela definição da tangente no segundo quadrante, $m = -\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Para uma horizontal, $m = \operatorname{tg}(0°) = 0$. Para a vertical, a variação horizontal é zero e a tangente de 90° também é indefinida. □

Exemplo 3.6. *Um coeficiente negativo não pede uma inclinação negativa*

Encontre as inclinações das retas $y = x + 2$, $y = -x + 3$, $y = 4$ e $x = -1$.

Resolução.
Um triângulo retângulo com catetos iguais tem ângulos agudos de 45°, logo $\operatorname{tg}(45°) = 1$. A primeira reta tem inclinação 45°.

A segunda tem $m = -1$. Pela convenção $0° \leqslant \alpha < 180°$ e pela relação entre inclinação e coeficiente angular, sua inclinação é 135°, pois $180° - 135° = 45°$. O ângulo $-45°$ aponta para a mesma reta, mas não é a inclinação escolhida. As duas últimas são horizontal e vertical, com inclinações 0° e 90°, respectivamente. A Figura 3.11 mostra as quatro retas.

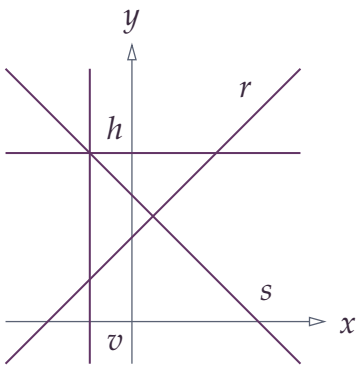


Figura 3.11: As retas $r : y = x + 2$, $s : y = -x + 3$, $h : y = 4$ e $v : x = -1$ têm inclinações 45°, 135°, 0° e 90°, respectivamente.

3.3 Escolher uma representação

Se conhecemos um ponto e o coeficiente angular, podemos escrever diretamente como a ordenada varia a partir desse ponto. Outras informações, como dois pontos ou as interseções com os eixos, sugerem outras formas da mesma equação.

Proposição 3.4. (Equação fundamental da reta e forma reduzida). *A reta não vertical por $P_0 = (x_0, y_0)$, com coeficiente angular m, é*

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ao desenvolver, obtém-se $y = mx + b$, em que $b = y_0 - mx_0$ é a ordenada de sua interseção com o eixo vertical.

Demonstração.
Fixe $P_0 = (x_0, y_0)$ e tome outro ponto $X = (x, y)$ da reta. Como a reta não é vertical, $x \neq x_0$. No desenho, a horizontal por P_0 e a vertical por X isolam as duas variações.

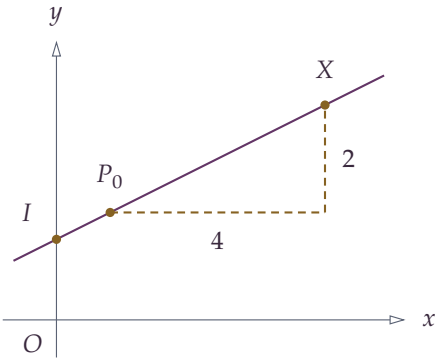


Figura 3.12: Na reta por $P_0 = (1, 2)$ e $X = (5, 4)$, a subida de 2 acompanha um avanço de 4. O ponto I em que a reta corta o eixo vertical tem ordenada $\frac{3}{2}$.

A definição de m dá $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m$, de onde $y - y_0 = m(x - x_0)$. O próprio P_0 também satisfaz a última igualdade. Reciprocamente, ao isolar y, obtemos $y = mx + (y_0 - mx_0)$.

Essa equação descreve uma reta e, nela, qualquer avanço horizontal de uma unidade produz variação vertical m. Ela passa por P_0 e corta o eixo vertical em $(0, y_0 - mx_0)$. □

Exemplo 3.7. *Um ponto e uma direção*

Determine a reta por $P = (4, 1)$ cujo coeficiente angular é $-\frac{3}{2}$.

Resolução.
Para uma reta não vertical, a forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ usa dois dados: o ponto conhecido (x_0, y_0) e o coeficiente angular m. Neste problema, $x_0 = 4, y_0 = 1$ e $m = -\frac{3}{2}$; já x, y são as coordenadas variáveis de qualquer ponto procurado na reta. Substituindo os dados,

$$y - 1 = \frac{-3}{2}(x - 4).$$

A variação vertical $y - 1$ é $-\frac{3}{2}$ da horizontal $x - 4$. A igualdade inclui também P, quando ambas são zero, sem dividir por $x - 4$. Uma direção vertical teria de ser tratada diretamente por $x = 4$, pois não admitiria o dado real m. Multiplicando por 2 e reunindo os termos, obtemos $3x + 2y - 14 = 0$. As operações são reversíveis; assim, a forma geral e a primeira condição representam a mesma reta. Substituir $(4, 1)$ dá $12 + 2 - 14 = 0$, e isolando y, encontramos o coeficiente angular $m = -\frac{3}{2}$.

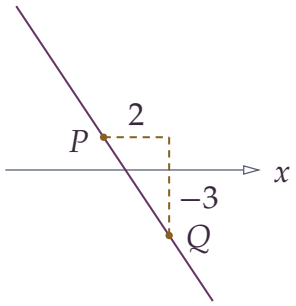


Figura 3.13: Partindo de $P = (4, 1)$, avançar 2 e descer 3 fornece outro ponto, $Q = (6, -2)$, da reta $3x + 2y - 14 = 0$.

Dados pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, a fórmula de m pode ser substituída na forma anterior, desde que $x_1 \neq x_2$. Há uma maneira de registrar o resultado sem denominador, que também inclui a vertical.

Proposição 3.5. (Reta por dois pontos distintos). *Para $P \neq Q$, a reta PQ tem equação*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

O determinante registra a colinearidade de P, Q e (x, y). Desenvolvendo-o pelas diferenças de coordenadas, a mesma equação fica

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

Se $x_2 = x_1$, essa igualdade se reduz a $x = x_1$. Se $y_2 = y_1$, reduz-se a $y = y_1$.

Demonstração.
Escreva uma linha para cada ponto, começando por $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ e terminando pelo ponto a testar, $X = (x, y)$. O módulo do determinante é o dobro da área do triângulo PQX. Assim, ele se anula exatamente quando os pontos são colineares. Como $P \neq Q$, isso equivale a X pertencer à reta PQ.
Compare as alturas correspondentes a X e a X' para a mesma base PQ.

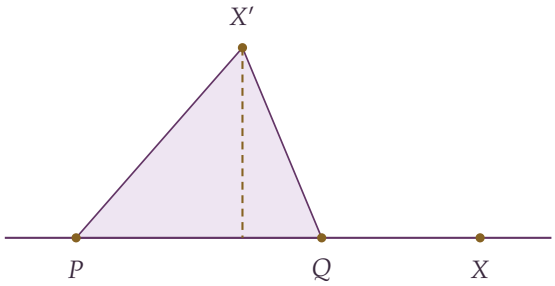


Figura 3.14: Os pontos fixos P, Q formam a base. Para X na reta a área é zero. Para X' fora dela, a mesma base e uma altura positiva dão área positiva.

Subtraindo a linha de P de cada uma das outras duas e desenvolvendo pela última coluna, restam as diferenças $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $(x - x_1, y - y_1)$. O determinante de ordem dois se anula quando $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$. Se $x_2 = x_1$, temos $y_2 - y_1 \neq 0$, logo $x = x_1$. Se $y_2 = y_1$, temos $x_2 - x_1 \neq 0$, logo $y = y_1$. Se os pontos dados coincidissem, duas linhas do determinante seriam iguais para todo X e nenhuma reta seria determinada. □

Exemplo 3.8. *Dois pontos sem arredondar o coeficiente angular*

Determine a reta por $A = (-1, 2)$ e $B = (5, -1)$.

Resolução.
De A a B, avançamos 6 unidades e descemos 3. Para um terceiro ponto (x, y) ficar na mesma reta, as variações $(x + 1, y - 2)$ precisam manter essa proporção. O determinante desses dois pares deve ser zero, o que fornece

$$6(y-2) = -3(x+1).$$

Dividir por 3 e reunir os termos dá $x + 2y - 3 = 0$. Ela contém os dois pontos, pois $-1 + 4 - 3 = 0$ e $5 - 2 - 3 = 0$. Seu coeficiente angular é $-\frac{1}{2}$, como também resulta de $\frac{-1-2}{5-(-1)}$. Não foi preciso aproximar nenhuma razão.

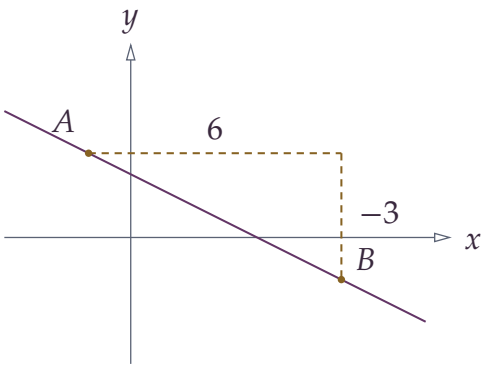


Figura 3.15: A reta $x + 2y - 3 = 0$ liga $A = (-1, 2)$ a $B = (5, -1)$. O deslocamento horizontal é 6 e o vertical é -3.

Exemplo 3.9. *Por que uma reta pela origem não admite a forma $ax + by = 1$*

Encontre a reta por $O = (0, 0)$ e $P = (3, -2)$. É possível escrevê-la como $ax + by = 1$?

Resolução.
A reta passa pela origem e avança três unidades para a direita enquanto desce duas até P. Seu coeficiente angular é $-\frac{2}{3}$. Na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, usamos $(x_0, y_0) = (0, 0)$, obtendo $y = \frac{-2}{3}x$, isto é, $2x + 3y = 0$. Ela passa pela origem e por P, que são distintos.

Nenhuma condição $ax + by = 1$ admite a origem, pois nela o lado esquerdo seria zero. Logo, a reta encontrada não possui essa forma. Podemos multiplicar todos os coeficientes por uma constante não nula, mas não transformar em não nulo um termo independente que é zero. O termo independente precisa participar da comparação de equações.

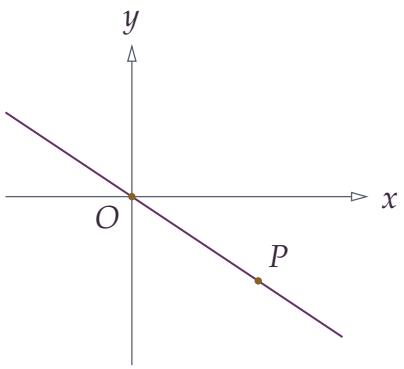


Figura 3.16: A reta $2x + 3y = 0$ contém O e $P = (3, -2)$. A passagem por O impede qualquer equação equivalente com lado direito 1.

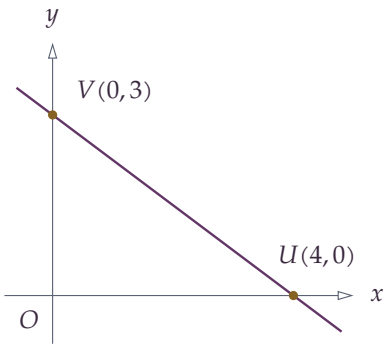
Para obter as interseções com os eixos, substituímos $y = 0$ ou $x = 0$ na equação geral. Se $A \neq 0$, o ponto no eixo horizontal é $\left(\frac{-C}{A}, 0\right)$; se $A = 0$, a reta é horizontal, podendo não encontrar esse eixo ou coincidir com ele. O caso do eixo vertical é análogo, trocando A por B.

Proposição 3.6. (Equação segmentária da reta). *A reta que corta os eixos em $U = (a, 0)$ e $V = (0, b)$, com $ab \neq 0$, tem equação*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Os números a, b são coordenadas com sinal. A forma não inclui uma reta pela origem nem uma reta paralela a um dos eixos.

Demonstração.
Os pontos $U = (a, 0)$ e $V = (0, b)$ fornecem os dois dados da equação por pontos distintos. Na figura, $a = 4$ e $b = 3$. Podemos usar a mesma construção quando a ou b for negativo.



$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

Figura 3.17: Nos pontos de interseção com os eixos, a é a abscissa de U e b é a ordenada de V. Neste desenho, ambas são positivas.

De U a V, as variações são $-a$ e b. De U a (x, y), são $x - a$ e y. O critério de colinearidade dá $(-a)y = b(x - a)$, ou $bx + ay = ab$. Como $ab \neq 0$, a divisão por ab é reversível e fornece $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Substituir $y = 0$ e depois $x = 0$ fornece as coordenadas de U e V. □

Exemplo 3.10. *Uma reta que corta o semieixo positivo de x e o negativo de y*

Uma reta corta os eixos em $(3, 0)$ e $(0, -2)$. Determine sua equação e a área do triângulo formado com a origem.

Resolução.
Os pontos $(3, 0)$ e $(0, -2)$ são distintos e determinam a reta. De um ao outro, as variações são -3 e -2, logo o coeficiente angular é $\frac{2}{3}$. A passagem por $(3, 0)$ dá $y = \frac{2}{3}(x - 3)$, ou $2x - 3y - 6 = 0$. Dividindo por 6, chegamos à equação segmentária

$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. O segundo denominador registra a ordenada negativa; não é um comprimento.
Os segmentos entre a origem e os dois interceptos são os catetos.

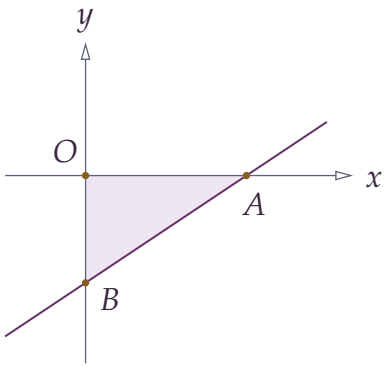


Figura 3.18: A reta corta os eixos em $A = (3, 0)$ e $B = (0, -2)$. Os catetos OA e OB medem 3 e 2, embora a ordenada de B seja negativa.

Para a área, usamos comprimentos: a base sobre o eixo horizontal mede 3 e a altura vertical mede 2. A área é $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$. A ordenada negativa localiza um ponto abaixo da origem; não torna negativa a área do triângulo.

Exemplo 3.11. *Duas retas atendem a duas condições*

Uma reta passa por $P = (3, 1)$ e corta os semieixos positivos em $(a, 0)$ e $(0, b)$. Sabendo que $a + b = 8$, determine todas as retas possíveis.

Resolução.
As coordenadas positivas permitem a equação segmentária. Substituir P fornece $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$. A outra condição dá $b = 8 - a$, com $0 < a < 8$. Multiplicamos a primeira igualdade por ab, sem perder equivalência, pois ambos são positivos:

$$3b + a = ab.$$

Substituindo $b = 8 - a$ e fatorando, obtemos

$$24 - 2a = 8a - a^2 \Leftrightarrow (a - 4)(a - 6) = 0.$$

Os candidatos são $(a, b) = (4, 4)$ e $(6, 2)$; os dois têm coordenadas positivas e soma 8.

As retas são $x + y = 4$ e $x + 3y = 6$, e ambas passam por $(3, 1)$. A fatoração esgotou os candidatos; a conferência das condições confirma os dois. A informação dada não era um ponto e uma direção: eram condições que produziram uma equação de segundo grau, permitindo duas respostas.

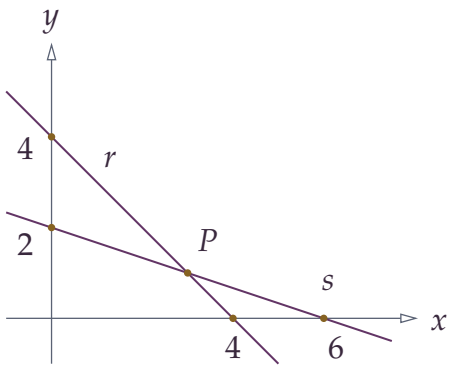


Figura 3.19: As retas $r : x + y = 4$ e $s : x + 3y = 6$ passam por $P = (3, 1)$ e cortam os eixos, respectivamente, em $(4, 0)$ e $(0, 4)$, e em $(6, 0)$ e $(0, 2)$.

Exemplo 3.12. *A forma geral evita contas desnecessárias*

Decida se $P = (10, 12)$ pertence à reta $r : 3x - 2y - 6 = 0$. Encontre também as interseções de r com os eixos.

Resolução.
Para testar o ponto, basta substituir: $3 \cdot 10 - 2 \cdot 12 - 6 = 0$, logo $P \in r$. Não precisamos isolar y nem calcular o coeficiente angular.

No eixo horizontal, $y = 0$, portanto $3x = 6$ e a interseção é $(2, 0)$. No vertical, $x = 0$, portanto $-2y = 6$ e a interseção é $(0, -3)$. Esses dois pontos determinam a reta representada na Figura 3.20. A forma reduzida, se desejada, seria $y = \frac{3}{2}x - 3$.

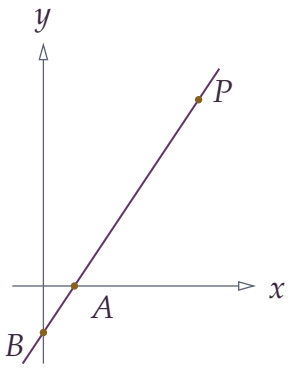


Figura 3.20: Os pontos $A = (2, 0)$ e $B = (0, -3)$ sobre os eixos determinam a reta, que também contém $P = (10, 12)$.

3.4 Um parâmetro para percorrer a reta

Uma equação seleciona pontos por uma condição. Outra possibilidade é produzi-los a partir de um número t.

Proposição 3.7. (Equações paramétricas e domínio). *Seja* $P_0 = (x_0, y_0)$. *Para* $(u, v) \neq (0, 0)$,

$$\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

descreve uma reta inteira. Se $u = v = 0$, *descreve apenas* P_0.

Para $(u, v) \neq (0, 0)$ *e* $Q = (x_0 + u, y_0 + v)$, *restringir a* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *descreve o segmento* P_0Q; *restringir a* $t \geqslant 0$ *descreve a semirreta de origem* P_0 *que passa por* Q.

Demonstração.
Escolha $P_0 = (x_0, y_0)$ e dois números u, v, não ambos zero. A condição

$$x = x_0 + ut, \quad y = y_0 + vt$$

faz a variação horizontal ser ut e a vertical, vt. Se $u \neq 0$, obtemos $t = \frac{x - x_0}{u}$; a eliminação dá $y - y_0 = \left(\frac{v}{u}\right)(x - x_0)$, a reta por P_0 de coeficiente angular $\frac{v}{u}$. Se $u = 0$, temos $v \neq 0$: a abscissa é fixa, e $t = \frac{y - y_0}{v}$ percorre todas as ordenadas. Essa é a vertical $x = x_0$.

Para justificar as restrições geométricas, os comprimentos ao longo da reta são multiplicados por $|t|$, pois

$$P_0P^2 = (ut)^2 + (vt)^2 = t^2\left(u^2 + v^2\right).$$

O sinal de t escolhe de qual lado de P_0 está o ponto. Assim, $0 \leqslant t \leqslant 1$ fornece exatamente o percurso de P_0 até Q, com as extremidades, e $t \geqslant 0$ continua o percurso no mesmo sentido.
O mesmo par de expressões produz, portanto, os três percursos abaixo.

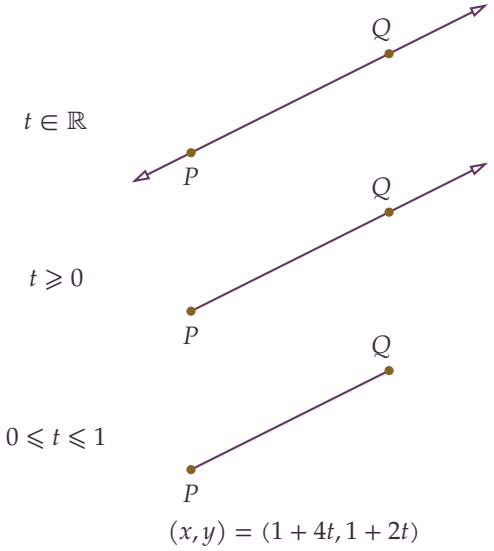


Figura 3.21: Os mesmos pares de expressões descrevem uma reta, uma semirreta ou um segmento, conforme os valores permitidos para t.

Para $u = v = 0$, ambas as coordenadas são constantes, e resta apenas P_0. □

Exemplo 3.13. *Eliminar o parâmetro e determinar seu valor a partir do ponto*

Identifique o conjunto $x = 1 + 3t, y = 2 - t$, com $t \in \mathbb{R}$. Todo ponto da reta obtida ao eliminar t corresponde a um valor real do parâmetro?

Resolução.
A segunda equação fornece $t = 2 - y$, sem denominador. Substituímos na primeira: $x = 1 + 3(2 - y)$, isto é, $x + 3y = 7$.

Para conferir a recíproca, tome qualquer ponto dessa reta e defina $t = 2 - y$. Sua ordenada já satisfaz a segunda equação, e $x = 7 - 3y = 1 + 3t$ satisfaz a primeira. Logo, a descrição é completa. O parâmetro não é uma coordenada adicional: é um número que escolhe um ponto no plano.

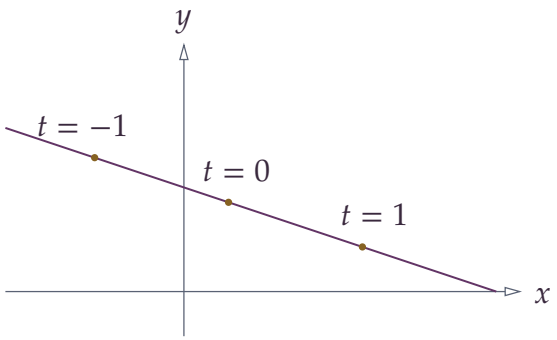


Figura 3.22: Os valores $t = -1, 0, 1$ fornecem três posições na reta $x + 3y = 7$. Em qualquer ponto da reta, calculamos t pela expressão $t = 2 - y$.

Exemplo 3.14. *Parametrização vertical e um caso que se reduz a um ponto*

Compare $(x, y) = (4, -2 + 5t)$ e $(x, y) = (4, -2)$, com t real.

Resolução.
Na primeira expressão, $x = 4$ e toda ordenada real é obtida com $t = \frac{y+2}{5}$. Temos a vertical $x = 4$, representada na Figura 3.23. Tentar calcular t da primeira coordenada exigiria dividir por uma variação nula; a segunda coordenada é a que deve ser usada.

Na segunda expressão, nenhuma coordenada varia. Todos os valores de t produzem o mesmo ponto $(4, -2)$. A existência de uma letra chamada parâmetro não garante que o conjunto seja uma reta.

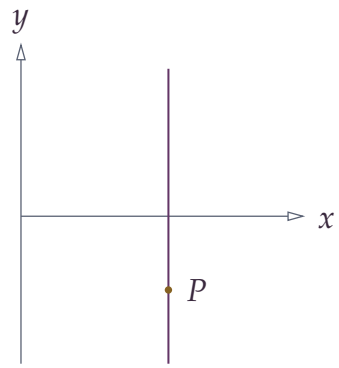


Figura 3.23: A primeira parametrização percorre a vertical $x = 4$; a segunda tem imagem reduzida ao ponto $P = (4, -2)$.

Exemplo 3.15. *Pertencer à reta não basta para pertencer ao segmento*

Para $P = (1, 1)$ e $Q = (5, 3)$, decida onde estão $R = (7, 4)$ e $S = (-1, 0)$ em relação à reta PQ, à semirreta de origem P por Q e ao segmento PQ.

Resolução.
Parametrizamos a reta orientada de P para Q, representada na Figura 3.24: $(x, y) = (1 + 4t, 1 + 2t)$. Para R, a primeira coordenada dá $t = \frac{3}{2}$, e a segunda confirma $1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4$. Para S, obtemos $t = -\frac{1}{2}$, e a ordenada confirma 0.

Os dois pertencem à reta, pois os parâmetros são reais. Apenas R pertence à semirreta dada, pois exige $t \geqslant 0$. Nenhum pertence ao segmento: seus parâmetros ficam fora de $[0, 1]$. A equação cartesiana da reta, sozinha, não distingue esses três conjuntos.

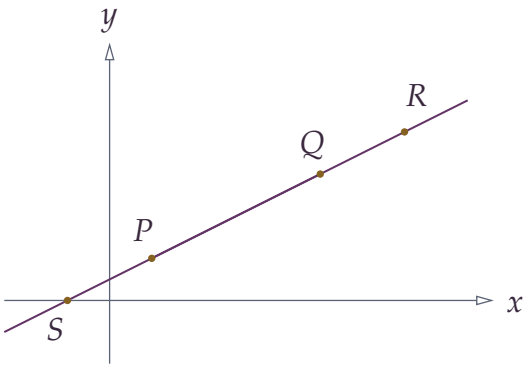


Figura 3.24: Na reta orientada de P para Q, temos a ordem S, P, Q, R. Apenas R está na semirreta dada, e ambos ficam fora do segmento PQ.

3.5 Interseção e paralelismo

Um ponto comum a duas retas deve satisfazer simultaneamente suas equações. Considere

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0' \end{cases}$$

com $(A_1, B_1) \neq (0,0)$ e $(A_2, B_2) \neq (0,0)$. Essas hipóteses precisam ser conferidas antes de interpretar o sistema como duas retas. Organizamos os coeficientes em três determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Em D_x, substituímos a coluna dos coeficientes de x pelos termos $-C_1, -C_2$; em D_y, fazemos isso com a coluna de y. Em particular, $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$.

Teorema 3.8. (Uma única interseção). *Se $\Delta \neq 0$, as duas retas têm exatamente um ponto comum:*

$$x = \frac{D_x}{\Delta}, \quad y = \frac{D_y}{\Delta}.$$

A divisão só é permitida nesse caso.

Demonstração.
Escreva $f_i = A_i x + B_i y + C_i$, para $i = 1, 2$. As combinações que eliminam uma incógnita ficam reunidas nas identidades

$$B_2 f_1 - B_1 f_2 = \Delta x - D_x, \quad A_1 f_2 - A_2 f_1 = \Delta y - D_y.$$

Se o ponto é comum às duas retas, $f_1 = f_2 = 0$, e obtemos as coordenadas enunciadas. Como $\Delta \neq 0$, nenhum outro ponto pode ser solução.

Falta provar que a dupla encontrada satisfaz as duas condições originais. Nela, os membros direitos das duas identidades são zero. Multiplicar a primeira por A_1 e a segunda por B_1 e somar dá $\Delta f_1 = 0$. A combinação com A_2 e B_2 dá $\Delta f_2 = 0$. Como o determinante é não nulo, $f_1 = f_2 = 0$.
O par encontrado dá o ponto de encontro das retas secantes, como no primeiro painel.

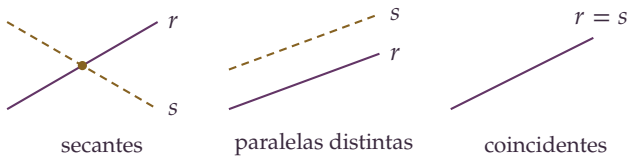


Figura 3.25: Duas retas podem ter um único ponto comum, nenhum ponto comum ou todos os seus pontos em comum.

□

Teorema 3.9. (Paralelismo e coincidência, incluindo verticais). *Para duas equações de reta, $\Delta = 0$ equivale à proporcionalidade*

$$(A_2, B_2) = \lambda(A_1, B_1), \quad \lambda \neq 0.$$

Nesse caso, as retas coincidem se $C_2 = \lambda C_1$; são paralelas distintas se $C_2 \neq \lambda C_1$. Em particular, coincidem exatamente quando suas triplas de coeficientes são proporcionais por fator não nulo.

Demonstração.
Se $\Delta = 0$, não podemos concluir que o sistema seja impossível: retas coincidentes também têm esse valor. Pelo critério de colinearidade aplicado aos pares (A_1, B_1) e (A_2, B_2) a partir da origem, o determinante é zero exatamente quando esses pares são proporcionais. Como ambos são não nulos, o fator λ é não nulo. Essa leitura inclui pares com primeira ou segunda coordenada zero, sem formar razões com denominadores possivelmente nulos.

Subtrair da segunda equação λ vezes a primeira deixa somente $C_2 - \lambda C_1 = 0$. Se essa constante não é zero, não há solução. Se é zero, a segunda condição apenas repete a primeira.
Nos dois painéis, uma das equações é $x = 1$. No primeiro, a outra equação impõe uma abscissa diferente. No segundo par, multiplicar todos os coeficientes pelo mesmo número conserva a abscissa.

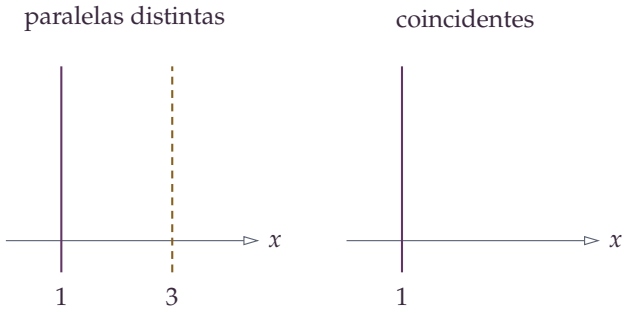


Figura 3.26: À esquerda, $x = 1$ e $2x = 6$ descrevem verticais distintas. À direita, $x = 1$ e $2x = 2$ descrevem a mesma vertical.

Por fim, se as retas coincidem, elas têm mais de um ponto em comum. O teorema da interseção única exclui $\Delta \neq 0$. Assim, a comparação das constantes acima também cobre a recíproca. □

Usaremos **paralelas distintas** para retas de mesma direção sem ponto comum, e trataremos coincidência à parte. Duas retas não verticais têm a mesma direção exatamente quando seus coeficientes angulares são iguais. Nesse caso, elas coincidem se, e somente se, cortam o eixo vertical no mesmo ponto. Duas verticais também têm a mesma direção, embora não tenham coeficientes angulares.

Exemplo 3.16. *Interseção por uma eliminação simples*

Determine o ponto comum a $r : 2x + y = 7$ e $s : x - y = 2$.

Resolução.
Os coeficientes de y já são opostos; somar as equações é mais curto que usar uma fórmula geral. Resulta $3x = 9$, então $x = 3$; a segunda dá $y = 1$.

A conferência é $2 \cdot 3 + 1 = 7$ e $3 - 1 = 2$. Para justificar que não há outra solução, observe que qualquer ponto comum precisaria satisfazer a soma e, portanto, ter $x = 3$ e depois $y = 1$. Pelo critério do determinante, $\Delta = 2(-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$ confirma a unicidade da interseção representada na Figura 3.27.

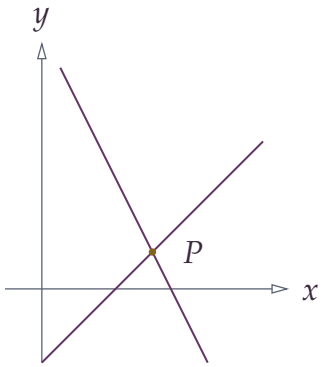


Figura 3.27: As retas $r : 2x + y = 7$ e $s : x - y = 2$ têm somente o ponto $P = (3, 1)$ em comum.

Exemplo 3.17. *Um parâmetro muda a direção sem apagar a reta*

Descreva as retas $r_k : kx + (k-1)y = 1$, conforme o número real k.

Resolução.
Os coeficientes k e $k - 1$ nunca são simultaneamente zero; por isso sempre existe uma reta. Para $k = 1$, ela é $x = 1$, vertical. Para $k = 0$, é $y = -1$, horizontal.

Nos demais casos, podemos isolar y, obtendo $y = \frac{-k}{k-1}x + \frac{1}{k-1}$. Essa forma fornece o coeficiente angular, mas não deve ser aplicada em $k = 1$. A Figura 3.28 mostra os casos horizontal, vertical e oblíquo, separados antes da divisão que excluiria um deles.

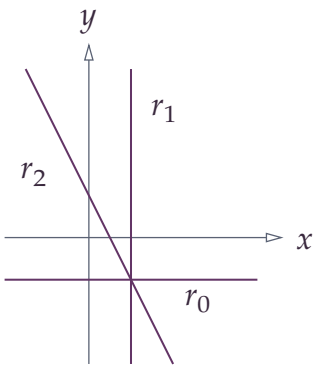


Figura 3.28: As retas $r_0 : y = -1$, $r_1 : x = 1$ e $r_2 : 2x + y = 1$ são os membros da família para $k = 0, 1, 2$, respectivamente.

Exemplo 3.18. *Paralela por um ponto*

Encontre a reta por $P = (3, -1)$ paralela à reta $r : 2x - 3y + 4 = 0$.

Resolução.
Para conservar a direção, mantemos os coeficientes de x, y: procuramos $s : 2x - 3y + c = 0$. A passagem por P exige $6 + 3 + c = 0$, logo $c = -9$.
A paralela por P conserva a inclinação de r.

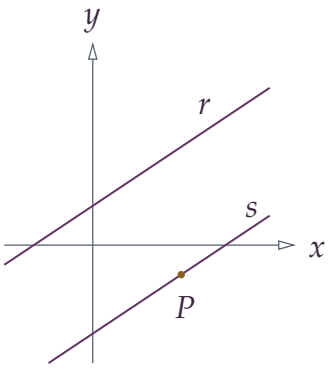


Figura 3.29: A reta $s : 2x - 3y - 9 = 0$ passa por P e tem a mesma direção de $r : 2x - 3y + 4 = 0$, com termo independente diferente.

Portanto, $s : 2x - 3y - 9 = 0$. Ela é distinta de r, pois as duas equações têm os mesmos coeficientes de x e y, mas termos independentes diferentes. A substituição de P dá zero. Esse método vale também quando um dos coeficientes de coordenada é zero, sem exigir a forma reduzida.

Exemplo 3.19. *Separar coincidência de paralelismo*

Considere as retas

$$r : 2x - 3y = 5 \quad \text{e} \quad s_k : (k+1)x - 6y = 10.$$

Para quais valores de k elas têm a mesma direção? Nesse caso, são distintas?

Resolução.
O coeficiente de y na segunda equação é o dobro do primeiro. A proporcionalidade dos pares exige também $k + 1 = 4$, ou seja, $k = 3$.

Para esse valor, toda a segunda equação é o dobro da primeira, inclusive o lado direito. Logo, as retas coincidem; não são paralelas distintas. Para qualquer outro k, o valor de Δ é não nulo, e há uma interseção única. Comparar somente os coeficientes das coordenadas não concluiria a última parte.

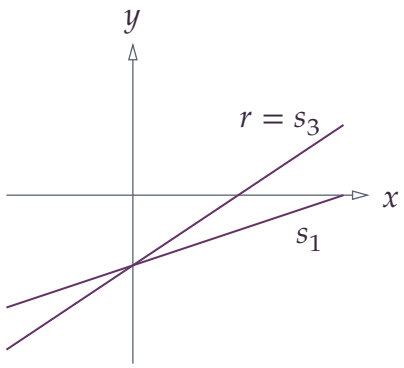


Figura 3.30: Para $k = 3$, s_3 é a própria r. O desenho mostra também s_1 como exemplo de valor diferente, quando há interseção única.

3.6 Perpendicularidade sem excluir os eixos

Como reconhecer um ângulo reto a partir das equações das retas? Se uma delas for vertical, seu coeficiente angular não existe. Por isso, começamos pelos coeficientes da forma geral.

Teorema 3.10. (Critério geral de perpendicularidade). *Duas retas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, com pares de coeficientes não nulos, são perpendiculares exatamente quando*

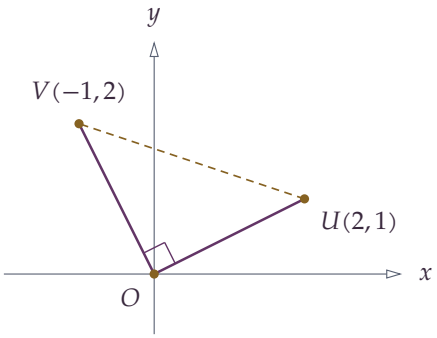
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Se ambas não são verticais, o critério equivale a $m_1m_2 = -1$. O caso horizontal-vertical está incluído no critério geral.

Demonstração.
Para reconhecer um ângulo reto, podemos usar a recíproca de Pitágoras, depois de reunir as duas direções num mesmo ponto.

Por uma origem O, trace paralelas às retas dadas e escolha nelas $U = (u, v)$ e $V = (p, q)$, ambos diferentes de O.

Ligue U a V para comparar UV^2 com $OU^2 + OV^2$.



$2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$

Figura 3.31: A comparação dos três quadrados de distâncias reconhece o ângulo reto entre duas direções.

A fórmula da distância dá

$$UV^2 = (u-p)^2 + (v-q)^2 = OU^2 + OV^2 - 2(up + vq).$$

Assim, a igualdade de Pitágoras $UV^2 = OU^2 + OV^2$ equivale a $up + vq = 0$. Se esse último número é zero, os pontos não são colineares: em uma mesma reta por O, teríamos $(p,q) = (tu, tv)$ com $t \neq 0$, e o número seria $t\left(u^2 + v^2\right) \neq 0$. Logo há um triângulo não degenerado, e a recíproca de Pitágoras garante o ângulo reto em O. No outro sentido, Pitágoras fornece a igualdade e o número zero. Isso prova necessidade e suficiência.

Na reta $Ax + By + C = 0$, as variações de um ponto para outro podem ser escolhidas como $(B, -A)$: somar B à abscissa e $-A$ à ordenada não altera o lado esquerdo, pois $AB - BA = 0$. Esse par não é nulo. Os dois pontos distintos assim obtidos pertencem à reta, logo esse deslocamento fixa sua direção.

De fato, aplicamos o resultado por Pitágoras aos pares de variações $(B_1, -A_1)$ e $(B_2, -A_2)$. Para obter a condição em m_1, m_2, escrevemos as equações como $m_i x - y + b_i = 0$. A soma dos produtos passa a ser $m_1 m_2 + 1$. Se uma reta é horizontal, sua perpendicular é vertical; o produto de coeficientes angulares não pode ser usado, pois um deles nem existe. □

Exemplo 3.20. *Perpendicular por um ponto, na forma geral*

Determine a reta por $P = (1,2)$ perpendicular a $r : 3x - 2y - 6 = 0$.

Resolução.
Isolar y na equação de r dá $y = \frac{3}{2}x - 3$. Por ser oblíqua, r também tem uma perpendicular oblíqua. Seu coeficiente angular m deve satisfazer $\left(\frac{3}{2}\right)m = -1$, logo $m = -\frac{2}{3}$. Na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituímos $(x_0, y_0) = (1,2)$ e obtemos $y - 2 = \frac{-2}{3}(x-1)$.

A resposta é $2x + 3y - 8 = 0$. A substituição de P dá $2 + 6 - 8 = 0$ e o produto dos coeficientes angulares vale -1. O ponto e a direção perpendicular determinam uma única reta.

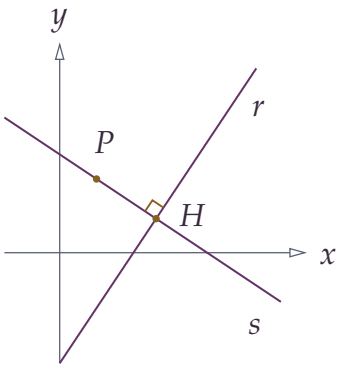


Figura 3.32: A reta $s : 2x + 3y - 8 = 0$ passa por P e cruza r perpendicularmente em $H = \left(\frac{34}{13}, \frac{12}{13}\right)$.

Exemplo 3.21. *Alturas exigem perpendicularidade ao lado oposto*

No triângulo $A = (0,0)$, $B = (6,0)$ e $C = (2,4)$, determine as retas das alturas por A e por C, e o ponto em que se cruzam.

Resolução.
A altura por um vértice é a reta que passa por ele e é perpendicular à reta do lado oposto.
Como AB é horizontal, a altura por C é a vertical $x = 2$.

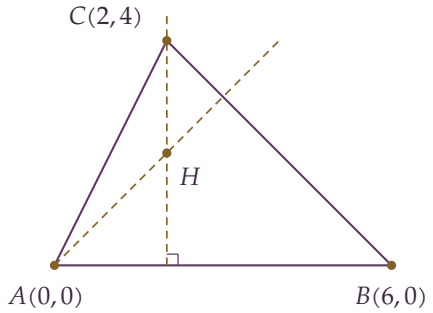


Figura 3.33: Uma altura pode ser vertical enquanto outra admite forma reduzida. Ambas são descritas no mesmo referencial.

A reta BC tem coeficiente angular $\frac{4-0}{2-6} = -1$. Para a altura por A, o produto dos coeficientes angulares deve ser -1: $(-1)m = -1$, logo $m = 1$. Como $A = (0,0)$, a equação fundamental da reta dá $y - 0 = 1(x - 0)$, ou $y = x$. Intersectando as duas alturas, encontramos $H = (2,2)$, como na Figura 3.34. A conferência da perpendicularidade usa os lados opostos: $y = x$ é perpendicular a BC, não ao lado AC.

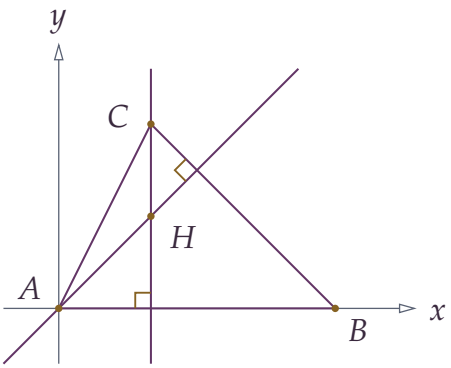


Figura 3.34: As alturas $x = 2$ e $y = x$ encontram-se em $H = (2, 2)$.

Exemplo 3.22. *Perpendicularidade com parâmetro*

Determine k para que $r_k : kx + 2y - 1 = 0$ e $s_k : 3x + (k-1)y + 4 = 0$ sejam perpendiculares.

Resolução.
A primeira condição sempre representa uma reta, pois o coeficiente de y é 2; a segunda também, pois o de x é 3. Podemos aplicar o critério geral a todo valor real de k:

$$3k + 2(k-1) = 0 \Leftrightarrow 5k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.$$

Para $k = \frac{2}{5}$, os produtos dos pares somam zero, portanto a condição é suficiente.

Não foi preciso dividir por $k - 1$ e excluir previamente a possibilidade de uma reta vertical.

3.7 Sistemas e casos excepcionais de um parâmetro

Um sistema linear em duas incógnitas reúne condições da forma $ax + by = c$. Quando as duas condições são equações de reta, as alternativas da Figura 3.25 dão uma solução, nenhuma ou infinitas. Se algum parâmetro torna uma equação uma identidade ou uma contradição, devemos interpretá-la antes de usar essa classificação.

O cálculo de Δ é uma maneira de localizar valores excepcionais. Fora deles, a divisão por Δ é permitida. Neles, voltamos às equações originais. Uma fórmula simplificada que deixou de exibir um fator no denominador continua válida apenas para os valores usados em sua dedução.

Exemplo 3.23. *Uma interseção que deixa de existir*

Discuta o sistema $x + y = 2$, $kx + y = 3$, para k real.

Resolução.
Subtrair a primeira igualdade da segunda fornece $(k-1)x = 1$. Se $k = 1$, teríamos $0 = 1$, impossível: as retas têm a mesma direção e são distintas.

Se $k \neq 1$, dividimos e obtemos

$$x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{2k-3}{k-1}.$$

A primeira igualdade vale pela escolha de y; a segunda é obtida somando à primeira $(k-1)x = 1$. Assim, a dupla é solução, e a eliminação mostra que é a única. Não há valor com infinitas soluções neste sistema.

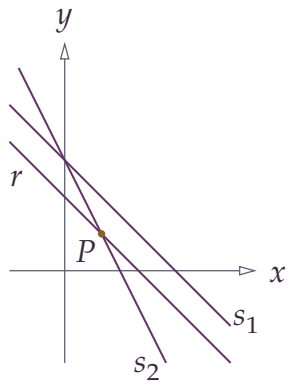


Figura 3.35: A reta $r : x + y = 2$ é paralela distinta de $s_1 : x + y = 3$. Para ilustrar o caso $k \neq 1$, $s_2 : 2x + y = 3$ encontra r em $P = (1, 1)$.

Exemplo 3.24. *Quando o sistema descreve uma reta inteira ou não tem solução*

Discuta $kx + y = k + 1$, $x + ky = 2$, para k real.

Resolução.
A combinação de k vezes a primeira igualdade menos a segunda dá

$$(k^2 - 1)x = k^2 + k - 2.$$

O coeficiente se anula em $k = 1$ ou $k = -1$. Voltamos primeiro a esses valores. Para $k = 1$, as duas equações são $x + y = 2$: toda a reta é solução. Para $k = -1$, são $-x + y = 0$ e $x - y = 2$, incompatíveis, pois a primeira exigiria $x - y = 0$.

Para $k \neq 1, -1$, fatoramos e dividimos:

$$x = \frac{(k-1)(k+2)}{(k-1)(k+1)} = \frac{k+2}{k+1}.$$

Da primeira equação, sem dividir por k, vem $y = \frac{1}{k+1}$. Substituir a dupla na segunda dá $\frac{(k+2)+k}{k+1} = 2$, e a primeira também é satisfeita. Mesmo simplificada, a fórmula de x só vale para $k \neq 1, -1$: em $k = 1$ há uma reta inteira de soluções e em $k = -1$ não há solução.

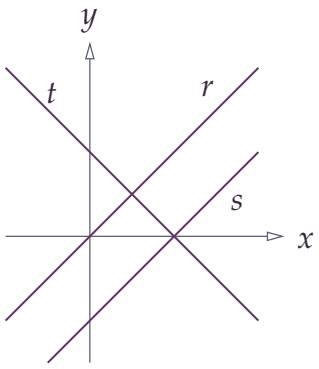


Figura 3.36: No caso excepcional $k = -1$, as retas $r : -x + y = 0$ e $s : x - y = 2$ são paralelas distintas. Para $k = 1$, as duas condições são a mesma reta $t : x + y = 2$.

Exemplo 3.25. *Uma equação desaparece*

Discuta $kx + ky = k$, $x - y = 2$, e compare com o sistema obtido ao trocar o lado direito da primeira equação por 1.

Resolução.
No sistema dado, $k = 0$ transforma a primeira condição em $0 = 0$. Resta apenas $x - y = 2$, com infinitas soluções. Para $k \neq 0$, podemos dividir a primeira por k: ela vira $x + y = 1$. Somando com a segunda, obtemos $x = \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$; a dupla satisfaz ambas.

Na versão com lado direito 1, o valor $k = 0$ produz $0 = 1$ e não há solução. Para $k \neq 0$, a soma das coordenadas é $\frac{1}{k}$; somá-la a $x - y = 2$ dá $x = 1 + \frac{1}{2k}$. Subtraindo 2 desse valor, obtemos $y = -1 + \frac{1}{2k}$. A soma é de fato $\frac{1}{k}$ e a diferença é 2. O coeficiente que desapareceu não dispensava a leitura do termo independente.

Exemplo 3.26. *Uma família de condições nem sempre é uma família de retas*

Para quais valores de t a igualdade $(t-1)x + \left(t^2 - 1\right)y = t - 1$ representa uma reta? Encontre um ponto de todas as retas assim obtidas.

Resolução.
Para $t = 1$, os dois lados são zero; a condição descreve o plano inteiro. Para $t \neq 1$, o fator $t - 1$ pode ser cancelado, deixando

$$x + (t+1)y = 1.$$

O coeficiente de x é 1, portanto sempre há uma reta nesses valores. Em particular, $t = -1$ produz a vertical $x = 1$, que não deve ser perdida por uma divisão por $t + 1$. A vertical e as duas oblíquas desenhadas passam por $(1, 0)$.

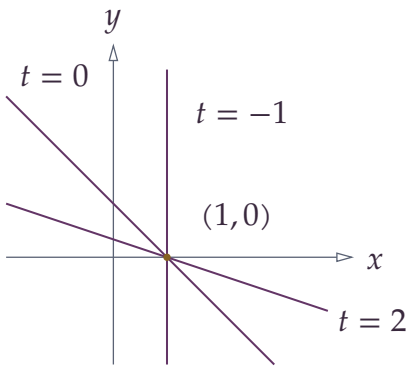


Figura 3.37: Três membros ilustram $x + (t + 1)y = 1$: $t = -1, 0, 2$. Todos contêm $(1, 0)$; a vertical não é perdida. O caso $t = 1$ corresponde ao plano inteiro.

O ponto $(1, 0)$ satisfaz todas as equações reduzidas. Para demonstrar que é o único ponto comum a todas as retas, basta usar $t = -1$ e $t = 0$: elas exigem $x = 1$ e $x + y = 1$, logo $y = 0$. A condição excepcional $t = 1$ continua sendo um plano, não mais uma dessas retas.

3.8 Feixes e concorrência +

Fixe duas retas secantes $r : f(x, y) = 0$ e $s : g(x, y) = 0$, em que f, g são expressões lineares, com interseção C. Toda condição

$$f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$$

é satisfeita por C, pois ali $f = g = 0$. Além disso, continua sendo uma reta: se os coeficientes de x e y se anulassem simultaneamente, os pares de coeficientes de r, s seriam proporcionais, contrariando a hipótese de que são secantes. Essas retas pertencem ao **feixe de retas de centro C**, isto é, à família de todas as retas que passam por C.

Teorema 3.11. (O feixe completo e uma reta ausente). *Se $r : f = 0$ e $s : g = 0$ são secantes, todas as retas por sua interseção podem ser escritas como*

$$\alpha f + \beta g = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

*A escrita $f + \lambda g = 0$, com λ real, descreve todas elas **exceto** $s : g = 0$.*

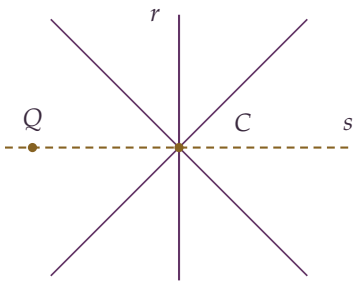
Demonstração.
Uma combinação $\alpha f + \beta g$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ não pode ter ambos os coeficientes de x, y nulos: isso contradiz o determinante não nulo dos pares de coeficientes de f, g. Portanto, é uma reta e passa pelo centro comum. Para provar que não falta outra reta,

escreva $f = A_1x + B_1y + C_1$, $g = A_2x + B_2y + C_2$ e uma reta qualquer do feixe como $ax + by + c = 0$. Como as duas primeiras são secantes, $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. O sistema

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = a, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = b$$

tem uma única solução. A combinação $\alpha f + \beta g$ possui, então, os mesmos coeficientes de x, y que a reta procurada. Seu termo independente também é c, pois as duas expressões se anulam em C. Os números α, β não são ambos zero, já que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Se $\alpha \neq 0$, dividimos por ele e usamos $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$. Se $\alpha = 0$, resta $g = 0$, a reta s.
Na figura ela é a horizontal por C. Marque nessa reta um ponto $Q \neq C$.



$$x - 2 + \lambda(y - 1) = 0$$

Figura 3.38: As combinações de duas equações de retas secantes passam pelo mesmo centro. A horizontal contém Q, onde a primeira equação de base não se anula.

Como r e s só se encontram em C, temos $f(Q) \neq 0$, enquanto $g(Q) = 0$. Assim, $f(Q) + \lambda g(Q) = f(Q) \neq 0$ para todo λ real. Nenhuma dessas retas contém Q, e a escolha $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ fornece a própria reta s. □

Exemplo 3.27. *Escolher um membro sem calcular primeiro o centro*

Determine a reta que passa pela interseção de $r : x + y - 3 = 0$ e $s : x - y - 1 = 0$ e pelo ponto $Q = (0, 4)$.

Resolução.
Sejam $f = x + y - 3$ e $g = x - y - 1$. No ponto de interseção, tanto f como g valem zero. Por isso, qualquer combinação $f + \lambda g = 0$ passa por ele. Para escolher a que passa também por Q, usamos as coordenadas desse segundo ponto. No ponto Q, os valores são $f(Q) = 1$ e $g(Q) = -5$, portanto $1 - 5\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{1}{5}$.

Multiplicar a combinação por 5 dá $5f + g = 0$, isto é, $3x + 2y - 8 = 0$. Ela contém Q e todo ponto com $f = g = 0$. As retas de base se cruzam em $(2, 1)$, que também satisfaz a resposta. Como Q não é esse centro, os dois pontos distintos determinam uma única reta.

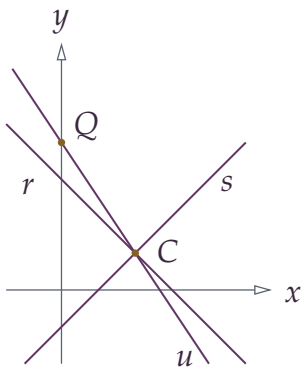


Figura 3.39: As bases r e s se cruzam em $C = (2, 1)$. O membro $u : 3x + 2y - 8 = 0$ passa também por $Q = (0, 4)$.

Exemplo 3.28. *O membro que a escrita habitual omite*

No feixe do exemplo anterior, encontre a reta por $Q = (0, -1)$. Por que a condição $f + \lambda g = 0$ não produz resposta?

Resolução.
Nesse ponto, $g(Q) = 0$ e $f(Q) = -4$. Assim, $f(Q) + \lambda g(Q) = -4$ para todo λ: não existe parâmetro finito que resolva essa condição.
Q pertence a s e é diferente do centro $(2, 1)$. Esses dois pontos determinam a reta procurada.

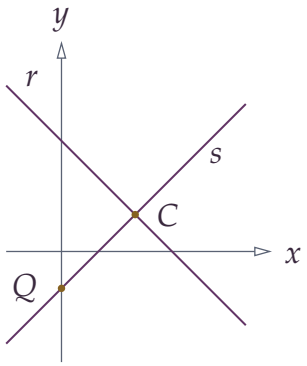


Figura 3.40: $Q = (0, -1)$ e $C = (2, 1)$ determinam a base s. Ela é o membro que não aparece em $f + \lambda g = 0$ para parâmetro finito.

A reta é a própria $s : x - y - 1 = 0$. Na forma completa, ela corresponde a $\alpha = 0$, $\beta = 1$. A falha estava na descrição incompleta do feixe, não na existência da reta geométrica.

Três ou mais retas são **concorrentes** quando possuem um ponto comum a todas. Encontrar um ponto comum às duas primeiras e testar as demais costuma ser mais curto que resolver todos os sistemas dois a dois. Retas que se encontram aos pares podem formar um triângulo e não ser concorrentes.

Exemplo 3.29. *Concorrência por um único ponto de teste*

Determine k para que as três retas sejam concorrentes:

$$r : x + y = 3, \quad s : x - y = 1, \quad u_k : kx + (k+1)y = 8.$$

Resolução.
As duas primeiras retas têm interseção única $C = (2, 1)$. Qualquer ponto comum às três precisa ser esse. A terceira passa por ele exatamente quando

$$2k + (k+1) = 8 \Leftrightarrow k = \frac{7}{3}.$$

Para esse valor, a terceira reta passa por C, logo as três têm esse ponto em comum. Seu par de coeficientes é $\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$, que não é proporcional aos de r ou s; as três são distintas. Não era necessário localizar suas outras interseções separadamente.

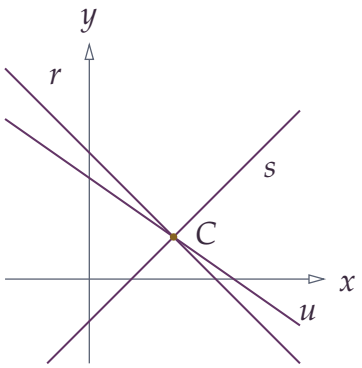


Figura 3.41: Para $k = \frac{7}{3}$, a terceira reta é $u : 7x + 10y = 24$. As três passam por $C = (2, 1)$.

Exemplo 3.30. *Combinar paralelas exige outra análise*

Para $f = x + y - 1$ e $g = x + y - 3$, discuta $f + \lambda g = 0$. A família passa por um centro comum?

Resolução.
As retas de base $f = 0$ e $g = 0$ são paralelas distintas. Para verificar se as retas da família têm um centro comum, desenvolvemos a combinação:

$$(1 + \lambda)(x + y) = 1 + 3\lambda.$$

Em $\lambda = -1$, a condição é $0 = -2$, e não há ponto. Para os demais valores, temos uma reta da forma $x + y = \frac{1+3\lambda}{1+\lambda}$. Em particular, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ dão $x + y = 1$ e $x + y = 2$, duas retas paralelas distintas da própria família. Nenhum ponto pode pertencer a ambas, logo não existe centro comum. A Figura 3.42 mostra essas duas retas e a outra reta de base.

A reta $g = 0$ não aparece: a igualdade $\frac{1+3\lambda}{1+\lambda} = 3$ exigiria $1 = 3$. A demonstração de que a combinação percorre todo o feixe de centro fixo usava retas secantes; transferi-la para bases paralelas sem conferir a hipótese produziria uma conclusão falsa.

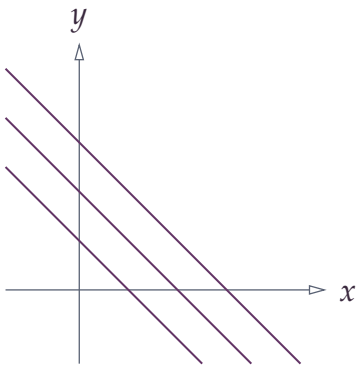


Figura 3.42: Em cada vertical, a ordem de baixo para cima é: $f = 0$, ou $x + y = 1$; o membro de $\lambda = 1$, ou $x + y = 2$; e $g = 0$, ou $x + y = 3$. As três retas são paralelas e não têm centro comum.

3.9 Exercícios

Equações e representações

3.1. Descreva os conjuntos definidos por (a) $5x - 2y = 10$; (b) $3y + 6 = 0$; (c) $0x + 0y + 4 = 0$; (d) $0x + 0y = 0$. Quais são retas? Para cada reta, encontre suas interseções com os eixos, distinguindo interseção vazia de coincidência com um eixo.

3.2. As condições $3x - 2y + 1 = 0$, $-6x + 4y - 2 = 0$ e $6x - 4y + 1 = 0$ definem a mesma reta? Justifique tanto as igualdades quanto as diferenças entre os conjuntos.

3.3. Encontre a reta por $P = (-2, 3)$ de coeficiente angular $\frac{2}{3}$. Encontre também a vertical pelo mesmo ponto. Em qual das duas é possível escrever $y = mx + b$?

3.4. Para cada real a, discuta a determinação da reta pelos pontos $P = (1, 2)$ e $Q = (1, a)$. Explique o que ocorre com a fórmula por dois pontos no valor excepcional.

3.5. Determine a reta que corta os eixos em $(4, 0)$ e $(0, -3)$. Calcule a área do triângulo formado com a origem e explique onde o sinal negativo da ordenada deve ser conservado e onde deve ser substituído por um comprimento.

3.6. * Determine todas as retas por $(2, 2)$ que cortam os eixos em $(a, 0)$ e $(0, b)$, com $a, b > 0$ e $a + b = 10$. As áreas dos triângulos que elas formam com os eixos são iguais?

Variações e inclinação

3.7. Determine o coeficiente angular, quando existir, e a inclinação de $3x - 3y = 6$, $y = 5$, $x = -2$ e $y = -x - 4$. Uma reta não vertical de maior inclinação tem necessariamente maior coeficiente angular?

Parametrização e domínios

3.8. Elimine t de $x = 2 - t$, $y = 1 + 2t$ e descreva o conjunto quando (a) $t \in \mathbb{R}$; (b) $-1 \leqslant t \leqslant 2$. Na segunda situação, verifique se $(1, 3)$ e $(-1, 7)$ pertencem ao conjunto.

3.9. Os pontos são dados por $x = -1 + 2t$, $y = 3 - t$. Determine os valores de t para os quais $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Descreva o conjunto obtido, incluindo suas extremidades.

3.10. Compare as duas descrições:

$$(x, y) = (1 + 2t, -1 + 3t), \quad (x, y) = (5 - 4u, 5 - 6u).$$

Elas dão a mesma reta quando os parâmetros são reais? Se restringirmos separadamente a $t \geqslant 0$ e $u \geqslant 0$, as semirretas serão iguais? Determine sua interseção.

Interseção, paralelismo e perpendicularidade

3.11. Um ponto parte de $(3, h)$ e percorre a semirreta vertical que sobe a partir desse ponto, incluindo a origem do percurso. Para quais valores reais de h ele pode alcançar a reta $2x - y = 5$? Determine o ponto de encontro e explique o que o determinante das duas retas permite concluir.

3.12. Encontre as retas por $P = (2, -1)$ que têm a mesma direção de (a) $3x + 2y = 6$; (b) $x = 4$. Diga se há coincidência com alguma das retas dadas.

3.13. Encontre as retas por $P = (-1, 3)$ perpendiculares a (a) $x = 4$; (b) $x + 2y = 4$. Justifique a escolha sem atribuir coeficiente angular à vertical.

3.14. O triângulo tem vértices $A = (-1, 0)$, $B = (5, 0)$ e $C = (1, 3)$. Determine as alturas por A e por C e sua interseção. Confira cada perpendicularidade com a reta do lado oposto.

3.15. Para $r : 2x - y = 3$ e $s_k : (k-1)x + 2y = 4$, determine os valores de k que dão paralelismo, coincidência, perpendicularidade ou uma única interseção. Indique possíveis sobreposições entre essas classificações.

Sistemas com parâmetros

3.16. Discuta, para t real, o sistema $x + y = 4$, $tx + y = t + 2$. Em cada caso, descreva o conjunto solução e confirme que os candidatos obtidos satisfazem as duas condições.

3.17. Discuta $x + ty = 1$, $tx + y = t$. Existe um ponto que seja solução para todo valor de t? Nos valores excepcionais, ele é a única solução?

3.18. Discuta o conjunto $\left(t^2 - 1\right)x + (t-1)y = t - 1$. Para quais valores de t ele é uma reta? Encontre o único ponto comum a todas as retas da família.

3.19. Discuta o sistema $x - 2y = 1$, $tx - 2ty = h$, em que t, h são reais. Há algum caso com uma única solução? Inclua explicitamente as possibilidades $t = 0$.

3.20. Seja P_t a interseção de $x + y = 3$ com $x - y = t$. Determine todos os valores de t para os quais P_t pertence ao segmento de extremidades $(3, 0)$ e $(0, 3)$.

Uma construção com alturas

3.21. * Um triângulo ABC tem $A = (2, 3)$ e vértice B no eixo horizontal. As retas das alturas por A e por B são, respectivamente, $y = x + 1$ e $y = 2x - 4$. Determine B, C e a interseção das alturas. Verifique se o triângulo obtido existe e diga se essa interseção está dentro dele.

Feixes e concorrência

3.22. $^+$ Considere $r_k : (k-1)x + (k+1)y = 2k$. Mostre que todas são retas e determine seu ponto comum. Qual reta por esse ponto não é obtida por nenhum valor real de k? Justifique que todas as demais são obtidas.

3.23. + Determine a reta que passa pela interseção de $2x + y = 4$ e $x - y = 1$ e pelo ponto $(0, 1)$, usando uma combinação das equações. Identifique a reta que a forma $f + \lambda g = 0$ omite quando $f = 2x + y - 4$ e $g = x - y - 1$.

3.24. + Determine a para que $2x + y = 3$, $x - y = 0$ e $ax + (a - 1)y = 4$ sejam concorrentes. Depois, decida se as retas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$ são concorrentes ou apenas se encontram duas a duas.

3.10 Soluções dos exercícios

Equações e representações

Exercício 3.1.

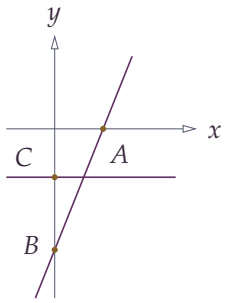


Figura 3.43: As duas condições que efetivamente são retas

Em (a), os coeficientes de x, y não são ambos zero, logo há uma reta. Para suas interseções, impomos uma coordenada zero de cada vez: $y = 0$ dá $x = 2$, e $x = 0$ dá $y = -5$. Portanto, os pontos são $(2, 0)$ e $(0, -5)$.

Em (b), a condição é $y = -2$, uma horizontal. Ela cruza o eixo vertical em $(0, -2)$ e não encontra o eixo horizontal, cujos pontos exigem $y = 0$. Não coincide com esse eixo, pois a ordenada é diferente de zero.

Em (c), a igualdade vira $4 = 0$, sem soluções. Em (d), vira $0 = 0$, verdadeira para todo o plano. Esses dois últimos conjuntos não são retas. As respostas foram obtidas lendo as condições, não apenas contando as letras na escrita.

Exercício 3.2.

Multiplicar a primeira equação por -2 produz exatamente $-6x + 4y - 2 = 0$.

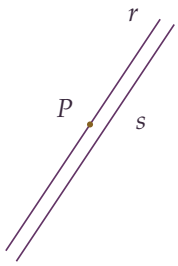


Figura 3.44: Ampliação para distinguir as paralelas

Como o fator não é nulo, podemos desfazer a operação. Portanto, as duas primeiras condições definem a mesma reta.

Os coeficientes de coordenada da terceira são o dobro dos da primeira, mas seu termo independente não é o dobro: deveria ser 2, e é 1. Não há coincidência. Para conferir a diferença por um ponto, tome $x = 1$ na primeira equação: $3 - 2y + 1 = 0$ dá $y = 2$. Na terceira, $(1, 2)$ produz $6 - 8 + 1 = -1$, e não zero. A proporcionalidade entre os coeficientes de x e y assegura que as retas têm a mesma direção. Como o ponto distingue as duas, são paralelas distintas.

Exercício 3.3.

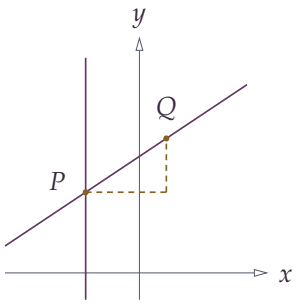


Figura 3.45: Duas direções pelo mesmo ponto

A forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ descreve uma reta não vertical por um ponto conhecido. Aqui, os dados são $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ e $m = \frac{2}{3}$; as letras x, y são as coordenadas variáveis de um ponto qualquer da reta.

Substituir os dados dá

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x + 2).$$

A igualdade afirma que a variação vertical é dois terços da horizontal e inclui o próprio ponto dado, quando ambas são zero. Multiplicar por 3 dá $2x - 3y + 13 = 0$. Ela contém $(-2, 3)$, pois $-4 - 9 + 13 = 0$, e sua forma reduzida é $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$.

A vertical por P exige $x = -2$, com qualquer ordenada. Ela não pode ter forma $y = mx + b$: essa forma atribuiria uma única ordenada à abscissa -2, enquanto a vertical contém, por exemplo, $(-2, 3)$ e $(-2, 4)$. As duas respostas representam direções diferentes por um mesmo ponto.

Exercício 3.4.

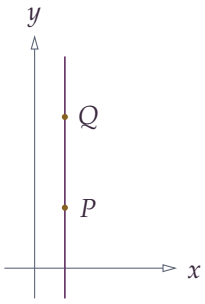


Figura 3.46: Pontos distintos com a mesma abscissa

Se $a \neq 2$, os pontos são distintos e têm a mesma abscissa. A única reta por eles é $x = 1$. Na fórmula sem denominador, a condição aparece como $0 = (a - 2)(x - 1)$, que pode ser dividida por $a - 2$.

Se $a = 2$, os pontos coincidem.

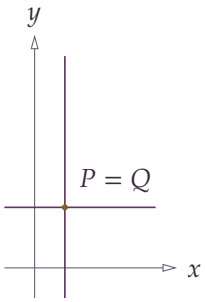


Figura 3.47: No valor excepcional, há apenas um ponto conhecido

A mesma fórmula se torna $0 = 0$ e admite todo o plano, portanto não fornece uma reta determinada. Geometricamente, há infinitas retas pelo único ponto conhecido, como $x = 1$ e $y = 2$. Cancelar o fator $a - 2$ sem separar esse caso esconderia a perda de informação.

Exercício 3.5.

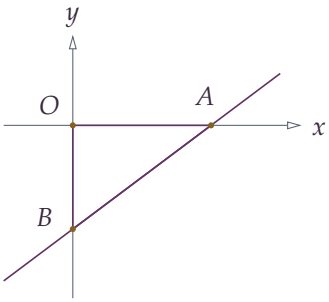


Figura 3.48: Uma coordenada negativa e dois comprimentos positivos

Conhecemos dois pontos distintos da reta, $U = (4, 0)$ e $V = (0, -3)$. De U a V, as variações são -4 e -3; logo, o coeficiente angular é $\frac{3}{4}$. A passagem por U dá $y = \frac{3}{4}(x - 4)$. Reunindo os termos e dividindo por 12, obtemos a forma segmentária, com os dois interceptos nos denominadores:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Multiplicar por 12 fornece $3x - 4y - 12 = 0$. O sinal negativo precisa permanecer na equação porque localiza o segundo ponto abaixo da origem. Substituir $(0, -3)$ dá zero, enquanto $(0, 3)$ não satisfaz a condição.

Para a área, os catetos do triângulo sobre os eixos medem 4 e 3. Logo, a área é $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$. A unidade usada nos comprimentos é positiva; o sinal da coordenada não é uma área negativa.

Exercício 3.6. *

Escrevamos os pontos de interseção com os eixos como $(a, 0)$ e $(0, b)$, com $a, b > 0$. Como os interceptos são não nulos, a equação segmentária é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. A passagem por $(2, 2)$ dá $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$, e a soma é $a + b = 10$.

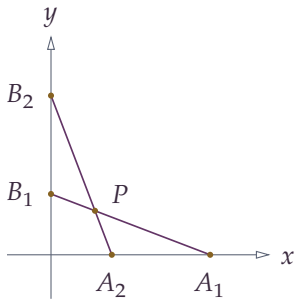


Figura 3.49: Os valores de a e b trocam de lugar

Multiplicar a primeira igualdade por $ab > 0$ produz $2(a + b) = ab$, portanto $ab = 20$. Com $b = 10 - a$, temos $a(10 - a) = 20$, ou

$$(a - 5)^2 = 5.$$

Assim, os dois pares são $(a, b) = \left(5 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5}\right)$ e o par invertido. Ambos são positivos, pois $\sqrt{5} < 5$, e satisfazem soma e produto.

Eles produzem as duas retas

$$\frac{x}{5 + \sqrt{5}} + \frac{y}{5 - \sqrt{5}} = 1,$$

$$\frac{x}{5 - \sqrt{5}} + \frac{y}{5 + \sqrt{5}} = 1.$$

Nenhum outro par é possível, porque resolvemos a equação equivalente a todas as condições. Os triângulos têm, ambos, área $a\frac{b}{2} = 10$. As retas são diferentes, embora compartilhem o ponto dado e a área.

Variações e inclinação

Exercício 3.7.

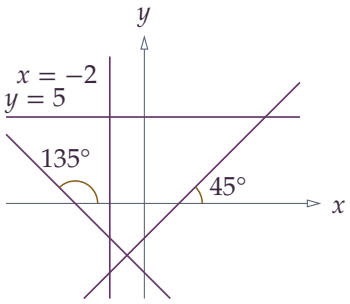


Figura 3.50: A vertical separa inclinações agudas e obtusas

A primeira equação é $y = x - 2$, com $m = 1$ e inclinação 45°. A segunda é horizontal, com $m = 0$ e inclinação 0°. A terceira é vertical: sua inclinação é 90°, mas seu coeficiente angular não existe. A última tem $m = -1$ e inclinação 135°.

A resposta à pergunta final é negativa. Entre a primeira e a última, a inclinação aumentou de 45° para 135°, enquanto o coeficiente diminuiu de 1 para -1. Entre os dois ângulos está 90°, onde a tangente não está definida.

Parametrização e domínios

Exercício 3.8.
Da primeira coordenada, $t = 2 - x$; substituindo na segunda, $y = 1 + 2(2 - x) = 5 - 2x$.

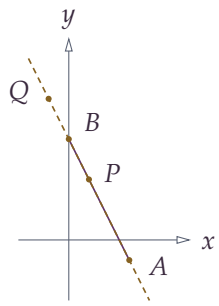


Figura 3.51: A restrição mantém apenas o segmento

Com t real, temos a reta inteira $2x + y = 5$. Reciprocamente, todo ponto dessa reta corresponde a $t = 2 - x$ e satisfaz as duas expressões paramétricas.

Nos extremos do intervalo permitido, $t = -1$ dá $(3, -1)$ e $t = 2$ dá $(0, 5)$. Como a parametrização percorre a reta de forma contínua e em um mesmo sentido, o intervalo descreve exatamente o segmento entre esses pontos, incluindo as extremidades.

Para $(1, 3)$, o parâmetro é 1, e a ordenada confirma 3; pertence ao segmento. Para $(-1, 7)$, é 3, que confirma a ordenada, mas está fora de $[-1, 2]$. Esse ponto pertence à reta que contém o segmento, mas fica fora do segmento pedido.

Exercício 3.9.
Precisamos satisfazer as duas desigualdades simultaneamente.

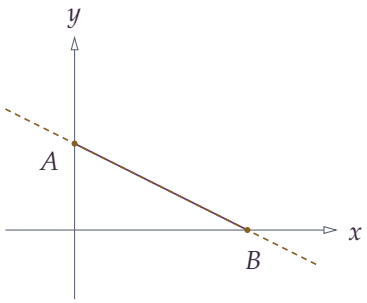


Figura 3.52: Coordenadas não negativas recortam um segmento

A primeira exige $-1 + 2t \geqslant 0$, equivalente a $t \geqslant \frac{1}{2}$; a segunda exige $3 - t \geqslant 0$, equivalente a $t \leqslant 3$. Portanto,

$$\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 3.$$

Em $t = \frac{1}{2}$, obtemos $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; em $t = 3$, obtemos $(5, 0)$. O conjunto é o segmento entre esses pontos. Ambos estão incluídos, pois as desigualdades não são estritas.

Todo parâmetro no intervalo dá coordenadas não negativas. Fora dele, ou a abscissa é negativa ou a ordenada é negativa. Isso prova que a restrição encontrada é necessária e suficiente, sem selecionar apenas alguns pontos de teste.

Exercício 3.10.

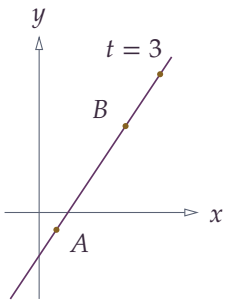


Figura 3.53: Duas origens para a mesma reta

Para comparar as descrições, igualamos as abscissas: $1 + 2t = 5 - 4u$, de onde $t = 2 - 2u$. Com essa relação, a ordenada da primeira é $-1 + 3(2 - 2u) = 5 - 6u$, exatamente a da segunda. Cada parâmetro real determina um real na outra descrição, pois $u = 1 - \frac{t}{2}$. Logo, as retas inteiras coincidem.

A restrição $t \geqslant 0$ corresponde a $u \leqslant 1$, e não a $u \geqslant 0$. As semirretas não são iguais: o ponto de $t = 3$ exigiria $u = -\frac{1}{2}$, proibido na segunda. Para pertencer às duas, precisamos de $t \geqslant 0$ e $u = 1 - \frac{t}{2} \geqslant 0$, isto é, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

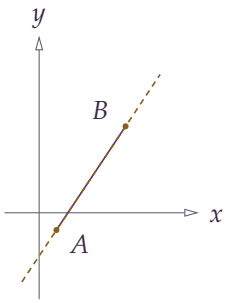


Figura 3.54: A interseção das duas semirretas é o segmento

Os extremos são $(1, -1)$ e $(5, 5)$. A interseção é o segmento entre eles. As duas parametrizações usam origens diferentes e sentidos opostos; por isso o mesmo sinal de restrição dos parâmetros não escolhe automaticamente o mesmo conjunto.

Interseção, paralelismo e perpendicularidade

Exercício 3.11.

A condição vertical já fixa $x = 3$.

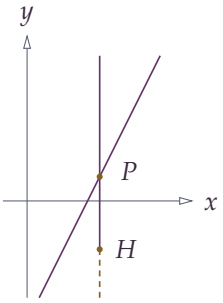


Figura 3.55: A semirreta que sobe desde H alcança P quando $h \leqslant 1$

Na outra equação, $6 - y = 5$, portanto $y = 1$. O ponto $(3, 1)$ satisfaz ambas, e qualquer solução precisaria ter essas mesmas coordenadas; logo é único.

Na forma geral, os pares são $(2, -1)$ e $(1, 0)$. Assim, $\Delta = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$, confirmando que o sistema das duas retas tem solução única. A semirreta só contém pontos de ordenada pelo menos h. Assim, o encontro ocorre para $h \leqslant 1$. Quando $h = 1$, ocorre na própria origem do percurso. Para $h > 1$, o cruzamento das retas está abaixo dela. O determinante garante a interseção das retas que se prolongam nos dois sentidos; a condição sobre a ordenada decide se o ponto também pertence à semirreta.

Exercício 3.12.
Em (a), conservamos o par $(3, 2)$ e procuramos $3x + 2y + c = 0$.

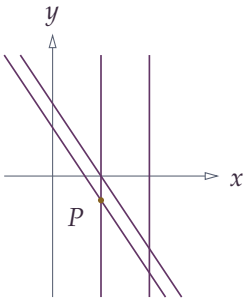


Figura 3.56: Conservar a direção e mudar a posição

Para conter $(2, -1)$, precisamos de $6 - 2 + c = 0$, logo $c = -4$. A resposta é $3x + 2y = 4$.

Comparada à equação dada, tem a mesma direção e outro termo independente; as retas são paralelas distintas.

Em (b), a direção da reta dada é vertical. A reta dessa direção pelo ponto é $x = 2$, também distinta de $x = 4$. Escrever uma forma reduzida não seria possível nesse item, mas basta fixar a abscissa para determinar a reta.

Exercício 3.13.
Em (a), a perpendicular a uma vertical é horizontal.

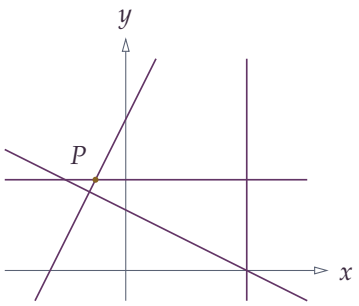


Figura 3.57: Uma horizontal e uma oblíqua pelo ponto dado

A horizontal por $(-1, 3)$ é $y = 3$. O critério geral usa os pares $(1, 0)$ e $(0, 1)$, cujos produtos somam zero, sem exigir um coeficiente angular da vertical.

Em (b), o par de coeficientes da reta dada é $(1, 2)$. Escolhemos $(2, -1)$ para a perpendicular, pois $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Sua equação é $2x - y + c = 0$; o ponto exige $-2 - 3 + c = 0$. Assim, a resposta é $2x - y + 5 = 0$.

Substituir as coordenadas do ponto confirma que ele pertence a cada uma das retas obtidas; a soma de produtos zero confirma a perpendicularidade. Cada direção perpendicular, junto com um ponto, determina uma única reta.

Exercício 3.14.

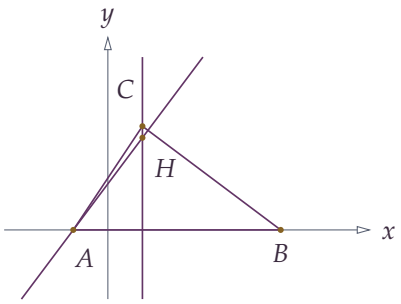


Figura 3.58: Cada altura corresponde ao lado oposto

O lado AB é horizontal. Portanto, a altura por $C = (1, 3)$ é $x = 1$. A reta BC tem coeficiente angular $\frac{3-0}{1-5} = -\frac{3}{4}$. A altura por A deve ser perpendicular a ela, então seu coeficiente m satisfaz $\left(-\frac{3}{4}\right)m = -1$, dando $m = \frac{4}{3}$. Com o ponto $A = (-1, 0)$, a equação fundamental da reta fornece

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x - (-1)), \quad \text{isto é,} \quad y = \frac{4}{3}(x + 1).$$

Intersectando com $x = 1$, encontramos $H = \left(1, \frac{8}{3}\right)$.

A vertical por C é perpendicular à horizontal AB. Para a outra altura, o produto $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = -1$ confirma a perpendicularidade a BC; ela também contém A. Essas duas conferências se referem aos lados opostos adequados, e não apenas a duas retas quaisquer do desenho.

Exercício 3.15.
As equações sempre representam retas, pois seus coeficientes de y são -1 e 2.

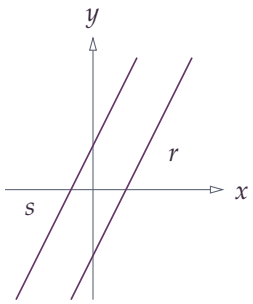


Figura 3.59: O caso de mesma direção tem retas distintas

Para ter a mesma direção, o segundo par precisa ser -2 vezes o primeiro: $k - 1 = -4$, ou seja, $k = -3$.

Nesse valor, a segunda equação é $-4x + 2y = 4$, enquanto multiplicar a primeira por -2 daria $-4x + 2y = -6$. São, portanto, paralelas distintas. Não há coincidência para nenhum valor de k.

A perpendicularidade exige $2(k-1) + (-1) \cdot 2 = 0$, logo $k = 2$. Nesse caso há uma interseção única. Para todos os $k \neq -3$, $\Delta = 4 + (k-1) = k + 3$ é não nulo, e a interseção também é única. Assim, a classificação como perpendicular está contida na de interseção única; elas não são alternativas excludentes.

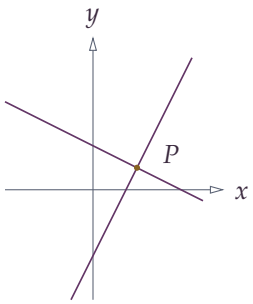


Figura 3.60: A perpendicularidade é um caso de interseção única

Sistemas com parâmetros

Exercício 3.16.
O coeficiente de y é o mesmo nas duas equações.

Para eliminá-lo, subtraímos a primeira da segunda:

$$(t-1)x = t - 2.$$

Em $t = 1$, teríamos $0 = -1$; o sistema é impossível.

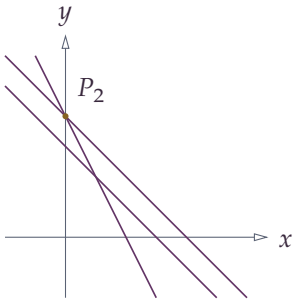


Figura 3.61: A exceção produz paralelas, os demais valores um ponto de interseção

Em $t \neq 1$, obtemos

$$x = \frac{t-2}{t-1}, \quad y = \frac{3t-2}{t-1}.$$

A soma das coordenadas é 4. Na segunda condição, temos

$$tx + y = (x + y) + (t-1)x = 4 + (t-2) = t + 2.$$

Essa verificação confirma a segunda condição. Toda solução precisaria ter o valor de x imposto pela eliminação e depois o mesmo y, logo essa dupla é única. Não ocorre uma reta inteira de soluções neste sistema.

Exercício 3.17.
Multiplicar a primeira igualdade por t e subtrair a segunda dá $\left(t^2 - 1\right)y = 0$.

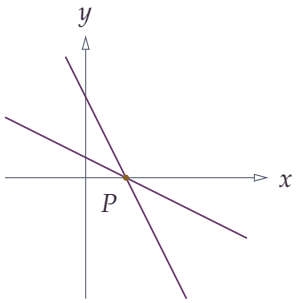


Figura 3.62: O ponto comum a todos os sistemas

Para $t \neq 1, -1$, segue $y = 0$ e depois $x = 1$. O ponto $(1, 0)$ satisfaz as duas condições para todo t.

Nos valores excluídos, retornamos ao sistema original. Para $t = 1$, as equações coincidem em $x + y = 1$.

Para $t = -1$, são $x - y = 1$ e $-x + y = -1$, também equivalentes.

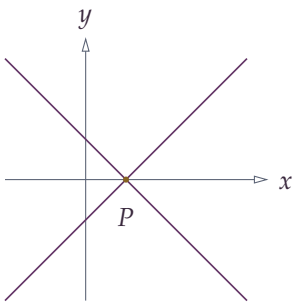


Figura 3.63: Nos valores excepcionais, surgem retas inteiras

Assim, há infinitas soluções nesses dois valores, em retas diferentes; $(1, 0)$ é um ponto de cada uma, não a solução única.

Não há caso impossível. A equação obtida por eliminação localizou as exceções, mas só as condições originais decidiram o que acontece nelas.

Exercício 3.18.
Em $t = 1$, os três coeficientes se anulam e a condição é $0 = 0$, verdadeira no plano inteiro.

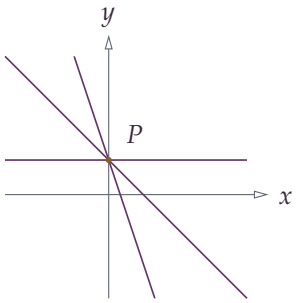


Figura 3.64: Retas da família antes da condição se apagar

Para $t \neq 1$, fatoramos $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ e dividimos por $t - 1$, obtendo

$$(t + 1)x + y = 1.$$

O coeficiente de y é 1, então esses e somente esses valores dão retas. Em particular, $t = -1$ fornece a horizontal $y = 1$.

O ponto $(0, 1)$ pertence a todas as retas. Para provar unicidade do ponto comum, tomamos $t = -1$, que obriga $y = 1$, e $t = 0$, que exige $x + y = 1$. Dessas duas condições, $x = 0$. Reciprocamente, já conferimos que $(0, 1)$ pertence a cada reta. O plano do caso excepcional não muda essa interseção, mas não deve ser contado como uma reta da família.

Exercício 3.19.
Toda solução da primeira condição satisfaz $tx - 2ty = t(x - 2y) = t$.

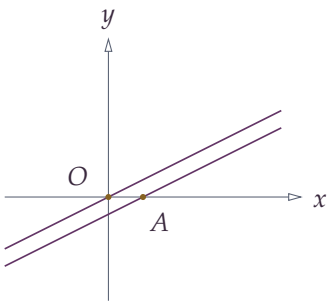


Figura 3.65: Compatibilidade e paralelas sem interseção

Portanto, a segunda condição é compatível com a primeira exatamente quando $h = t$.

Se $h = t$, todo ponto de $x - 2y = 1$ é solução, e o conjunto é essa reta. Se $h \neq t$, a segunda condição exige um valor diferente para a mesma expressão, e o conjunto é vazio. Nunca há uma única solução.

Em $t = 0, h = 0$, a segunda equação é a identidade $0 = 0$ e resta a primeira. Em $t = 0, h \neq 0$, ela é a contradição $0 = h$. Esses dois casos também obedecem à classificação geral, sem exigir divisão por t.

Exercício 3.20.

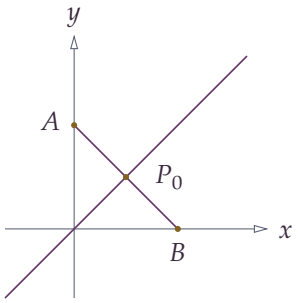


Figura 3.66: Os valores extremos do parâmetro correspondem aos pontos nos eixos

Na soma das duas igualdades, os termos em y se cancelam e resta $2x = 3 + t$. Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos $2y = 3 - t$. Logo,

$$P_t = \left(\frac{3+t}{2}, \frac{3-t}{2}\right).$$

O ponto pertence ao segmento que a reta $x + y = 3$ determina entre os eixos exatamente quando suas duas coordenadas são não negativas. De fato, nessa reta isso equivale a $0 \leqslant x \leqslant 3$, o percurso entre $(0, 3)$ e $(3, 0)$.

As duas condições são $3 + t \geqslant 0$ e $3 - t \geqslant 0$, portanto $-3 \leqslant t \leqslant 3$. Nos extremos, obtemos $(0, 3)$ e $(3, 0)$; entre eles, o ponto percorre o segmento. Fora do intervalo, uma coordenada é negativa, logo o ponto fica na reta, mas fora do segmento pedido.

Uma construção com alturas

Exercício 3.21. *

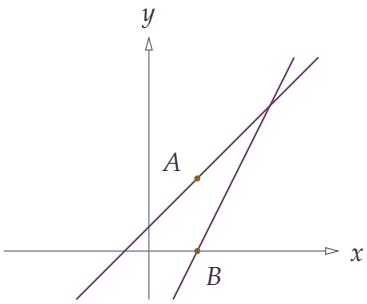


Figura 3.67: As duas alturas dadas e a construção do vértice B

O ponto B pertence ao eixo horizontal e à altura que parte dele. Por isso deve satisfazer $y = 0$ e $y = 2x - 4$, dando $B = (2, 0)$. As duas retas já determinam B.

Para encontrar C, precisamos das duas retas dos lados que o contêm. A altura por A tem coeficiente angular 1, portanto o lado oposto BC tem coeficiente -1. Na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, usamos $B = (2, 0)$ e $m = -1$. Assim, $y - 0 = -(x - 2)$, ou $x + y = 2$.

A altura por B tem coeficiente 2, logo AC tem coeficiente $-\frac{1}{2}$. A passagem por $A = (2, 3)$ dá $y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 2)$, ou $x + 2y = 8$. Subtrair $x + y = 2$ dessa igualdade dá $y = 6$ e depois $x = -4$. Portanto, $C = (-4, 6)$.

Os pontos A, B são distintos e têm abscissa 2, enquanto C não está nessa vertical. O triângulo não é degenerado. As retas construídas contêm os vértices devidos e são perpendiculares às alturas indicadas, o que confirma que os dados foram atendidos.

Finalmente, a interseção das alturas satisfaz $x + 1 = 2x - 4$, de onde $x = 5, y = 6$. Ela fica fora do triângulo, pois todos os seus vértices têm abscissa no máximo 2, e nenhum ponto interno pode ter abscissa 5.

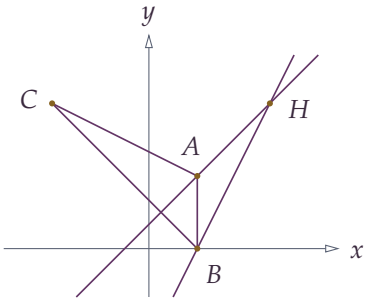


Figura 3.68: Os lados reconstruídos e o ortocentro fora do triângulo

Feixes e concorrência

Exercício 3.22. +

Os coeficientes $k - 1$ e $k + 1$ não se anulam simultaneamente, logo toda condição representa uma reta.

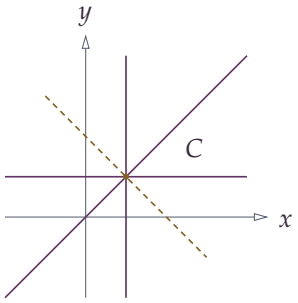


Figura 3.69: O feixe e uma direção omitida

Para descobrir o ponto comum, usamos duas delas: em $k = 0$, temos $y = x$; em $k = 1$, temos $y = 1$. Assim, o único candidato é $(1, 1)$, que satisfaz a expressão original para todo k.

Reorganizando a equação, obtemos

$$(y - x) + k(x + y - 2) = 0.$$

As duas retas de base, $y - x = 0$ e $x + y - 2 = 0$, são secantes nesse ponto. Para qualquer outra reta por $(1, 1)$, escolha nela um segundo ponto $Q = (u, v)$. Como essa reta é diferente de $x + y - 2 = 0$, temos $u + v - 2 \neq 0$. A passagem por Q determina $k = \frac{u-v}{u+v-2}$, que faz a combinação representar a reta pelos dois pontos.

Podemos conferir a ausência por um ponto: $(2, 0)$ pertence à reta omitida, mas sua substituição na equação original exigiria $2k - 2 = 2k$, impossível. A reta existe geometricamente; é a forma de parametrizar que não a alcança.

Exercício 3.23. +

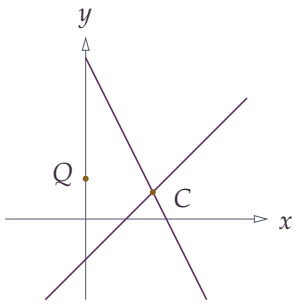


Figura 3.70: Duas retas de base e o ponto adicional

Escrevemos a combinação $f + \lambda g = 0$, com as expressões indicadas no enunciado. Em $Q = (0, 1)$, temos $f(Q) = -3$ e $g(Q) = -2$. Logo, $-3 - 2\lambda = 0$ e $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Para evitar frações na equação, usamos $2f - 3g = 0$. Desenvolver produz $x + 5y - 5 = 0$. Ela contém Q e toda interseção das retas de base. Estas se encontram em $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, e $\frac{5}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - 5 = 0$, logo, a reta também passa por esse ponto. Como esse centro é diferente de Q, a reta é única.

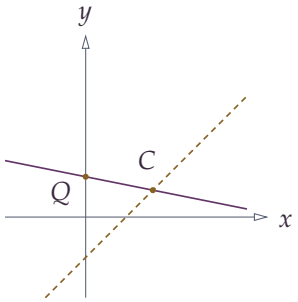


Figura 3.71: A combinação escolhida determina a reta por C e Q

Falta a reta $g = 0$, ou $x - y = 1$: para obtê-la na combinação $\alpha f + \beta g = 0$, basta tomar coeficientes 0 para f e 1 para g.

Exercício 3.24. +
De $x = y$ e $2x + y = 3$ segue que as duas primeiras retas se cortam em $(1, 1)$.

Testar esse ponto na terceira reta dá $a + (a - 1) = 4$, ou $a = \frac{5}{2}$. Os coeficientes a e $a - 1$ nunca se anulam juntos: a equação sempre representa uma reta.

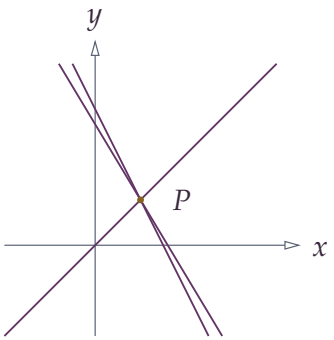


Figura 3.72: O ponto P pertence às três retas

No segundo grupo, as duas primeiras retas se cortam na origem, onde $x + y = 0$. A terceira, $x + y = 1$, não passa por esse ponto. A figura mostra as três interseções distintas: as retas se cortam duas a duas, mas não são concorrentes.

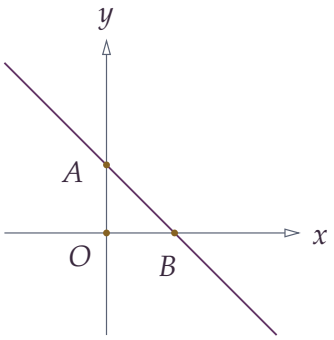


Figura 3.73: As retas se cortam duas a duas em três pontos distintos

Capítulo 4

Distâncias, ângulos e reflexões

Na planta de um terreno, uma casa é representada por um ponto e uma estrada reta passa perto dela. O morador quer abrir o acesso mais curto entre a casa e a estrada. Para desenhá-lo, precisa decidir em que ponto da estrada o caminho deve terminar. Essa escolha determina tanto a direção do acesso quanto seu comprimento.

4.1 O ponto mais próximo de uma reta

Seja P um ponto e r uma reta. A perpendicular a r que passa por P encontra a reta em H, chamado **pé da perpendicular** ou **projeção ortogonal** de P sobre r. Se P já está em r, tomamos $H = P$. A **distância de** P **a** r, indicada por $d(P, r)$, é o menor comprimento de um segmento que liga P a um ponto da reta. Provaremos que esse mínimo existe e vale PH.

Teorema 4.1. (Distância de um ponto a uma reta e pé da perpendicular). *Para* $r : Ax + By + C = 0$, *com* $A^2 + B^2 > 0$, *e* $P = (x_0, y_0)$, *defina* $L = Ax_0 + By_0 + C$ *e* $N = A^2 + B^2$. *Então*

$$d(P, r) = \frac{|L|}{\sqrt{N}}, \quad H = \left(x_0 - A\frac{L}{N}, y_0 - B\frac{L}{N} \right).$$

Demonstração.
Suponha primeiro que P esteja fora de r. Para descobrir qual ponto de r está mais perto de P, compare o pé H da perpendicular com um ponto qualquer $X \neq H$ de r.
Ligue P a H e a X. O ângulo em H é reto.

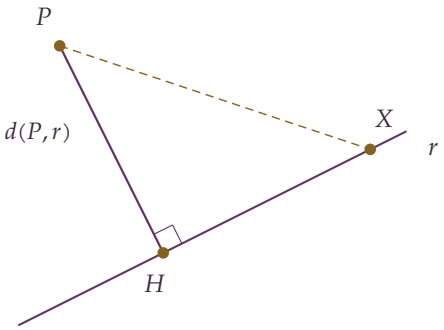


Figura 4.1: O segmento perpendicular é o menor entre os segmentos que ligam P à reta.

Pitágoras no triângulo PHX dá $PX^2 = PH^2 + HX^2$. Logo, $PX \geqslant PH$, com igualdade somente quando $X = H$. Se P pertence à reta, sua distância a si mesmo é zero, e qualquer outro ponto está a distância positiva. Portanto, o mínimo é $d(P, r) = PH$ em todos os casos.

Vamos encontrar H em coordenadas. Para $r : Ax + By + C = 0$, a direção perpendicular tem componentes (A, B). De fato, se $AB \neq 0$, os coeficientes angulares de r e dessa direção são $-\frac{A}{B}$ e $\frac{B}{A}$, cujo produto é -1. Se $A = 0$, r é horizontal e $(0, B)$ é uma direção vertical; se $B = 0$, ocorre o inverso.

Partindo de $P = (x_0, y_0)$, percorremos essa perpendicular. Um único número real t controla as duas variações, $-tA$ e $-tB$, de modo que procuramos

$$H = (x_0 - tA, y_0 - tB).$$

No desenho, PK e KH mostram as duas variações até o pé da perpendicular.

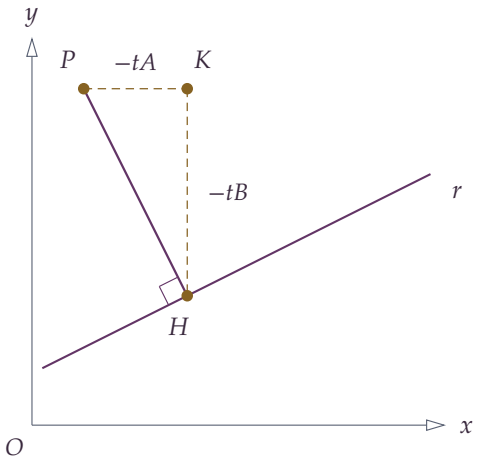


Figura 4.2: Nos eixos escolhidos, a reta tem equação $r : -x + 2y - 2 = 0$. Para ir de $P = \left(1, \frac{13}{2}\right)$ até $H = \left(3, \frac{5}{2}\right)$, a variação horizontal é 2 e a vertical é -4, correspondentes a $t = 2$. O ponto auxiliar K separa essas duas variações.

A direção já foi fixada; falta escolher o ponto em que ela encontra r. A condição $H \in r$ determina t:

$$A(x_0 - tA) + B(y_0 - tB) + C = 0 \quad \to \quad t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

O denominador é positivo. Essa construção fornece exatamente um ponto de r na perpendicular por P, inclusive para retas verticais e horizontais. Calculando PH por suas coordenadas, obtemos $|t|\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|L|}{\sqrt{N}}$. Substituir $t = \frac{L}{N}$ nas coordenadas de H fornece a outra fórmula enunciada. □

Exemplo 4.1. *Uma distância e seu ponto de chegada*

Determine a distância de $P = (4,5)$ à reta $r : 3x + 4y - 10 = 0$ e as coordenadas do ponto de r mais próximo de P.

Resolução.
O ponto mais próximo deve estar na perpendicular por P. A reta r tem coeficiente angular $-\frac{3}{4}$; o da perpendicular é $\frac{4}{3}$, pois seu produto é -1. Como ela passa por $(4,5)$, escrevemos

$$y - 5 = \frac{4}{3}(x-4) \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{4x-1}{3}.$$

Na interseção com r, temos $3x + 4\frac{4x-1}{3} - 10 = 0$. Multiplicar por 3 dá $25x = 34$, logo $H = \left(\frac{34}{25}, \frac{37}{25}\right)$. De P até H, as variações são $-\frac{66}{25}$ e $-\frac{88}{25}$; portanto,

$$PH = \sqrt{\left(\frac{66}{25}\right)^2 + \left(\frac{88}{25}\right)^2} = \frac{22}{5}.$$

A conferência $3\left(\frac{34}{25}\right) + 4\left(\frac{37}{25}\right) - 10 = 0$ coloca H em r. Não se trata apenas de um ponto que produz a distância encontrada: Pitágoras garante que ele é o único ponto mais próximo.

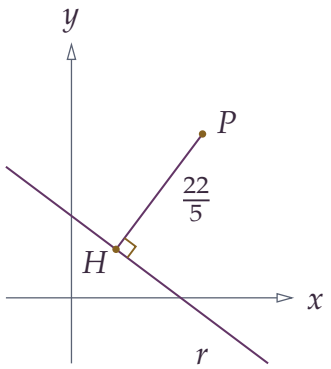


Figura 4.3: $H = \left(\frac{34}{25}, \frac{37}{25}\right)$ pertence a r. O segmento PH, perpendicular à reta, tem comprimento $\frac{22}{5}$.

Exemplo 4.2. *A mesma reta, números diferentes*

Um aluno usou $3x + 4y - 10 = 0$; outro usou $-6x - 8y + 20 = 0$. Eles devem obter distâncias diferentes para o mesmo ponto?

Resolução.
As equações representam a mesma reta, pois uma é a outra multiplicada por -2. O numerador da fórmula de distância é multiplicado por $|-2| = 2$; o denominador passa de $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ a $\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$, também o dobro. A razão permanece igual.

As duas equações representam a mesma reta, com o mesmo pé da perpendicular por P.

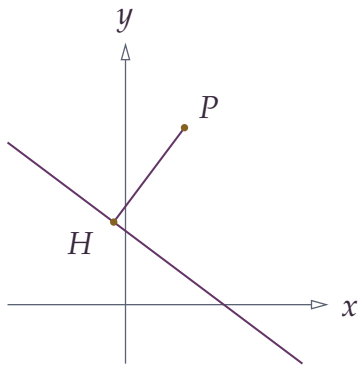


Figura 4.4: A reta é a mesma nas duas equações. A título de ilustração, $P = (2, 6)$ tem pé $H = \left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$ e distância 4, em qualquer normalização.

Em geral, multiplicar todos os coeficientes por $k \neq 0$ multiplica numerador e denominador por $|k|$. O valor absoluto é essencial: uma distância não muda de sinal quando trocamos a forma de escrever a reta.

Exemplo 4.3. *Retas verticais e horizontais*

Encontre as distâncias de $P = (-2, 5)$ às retas $x = 3$ e $y = -1$.

Resolução.
Para chegar perpendicularmente à vertical $x = 3$, conservamos a ordenada 5: o pé é $(3, 5)$, a cinco unidades para a direita de P. Para chegar à horizontal $y = -1$, conservamos a abscissa -2: o pé é $(-2, -1)$, a seis unidades abaixo. Logo, as distâncias são 5 e 6. O teorema do ponto mais próximo garante que esses percursos perpendiculares são mínimos. A fórmula geral confere $|-2 - 3| = 5$ e $|5 + 1| = 6$.

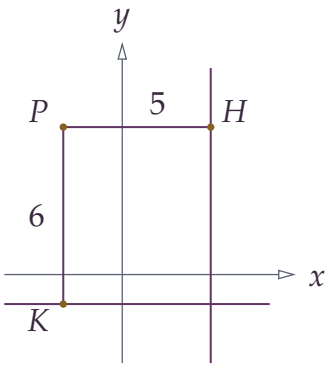


Figura 4.5: Os pés são $H = (3, 5)$ na vertical e $K = (-2, -1)$ na horizontal. Os segmentos PH e PK medem 5 e 6.

Exemplo 4.4. *Escolher um ponto a uma distância dada*

Quais pontos do eixo x estão a distância 2 da reta $3x + 4y - 6 = 0$?

Resolução.
Pertencer ao eixo x significa ter a forma $P = (a, 0)$. A distância imposta torna-se $\frac{|3a-6|}{5} = 2$, ou $|3a - 6| = 10$. O módulo admite dois sinais:

$$3a - 6 = 10 \quad \text{ou} \quad 3a - 6 = -10.$$

Da primeira equação vem $a = \frac{16}{3}$; da segunda, $a = -\frac{4}{3}$.
As perpendiculares por esses dois pontos do eixo medem 2.

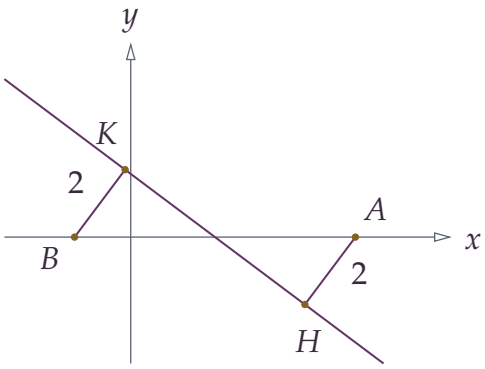


Figura 4.6: As posições são $A = \left(\frac{16}{3}, 0\right)$ e $B = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, em lados opostos de r. Seus pés em r são H e K, respectivamente, com $AH = BK = 2$.

Em $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$, a expressão $3a - 6$ vale 10; em $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, vale -10. Ambos satisfazem a condição original; apagar o módulo desde o início perderia uma das posições.

Exemplo 4.5. *Altura e área sem procurar o pé*

Calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 4)$ e $C = (2, 6)$.

Resolução.
Tomamos AB como base. As diferenças de coordenadas de A a B são 4 e 3, de modo que seu comprimento é $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Para construir a reta da base, usamos o coeficiente angular $m = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4}$ e o ponto $A = (1, 1)$:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0.$$

A altura relativa à base é a distância de C a essa reta, mesmo que o pé estivesse fora do segmento:

$$h = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 6 + 1|}{5} = \frac{17}{5}.$$

Logo, a área é $\frac{5\cdot\frac{17}{5}}{2} = \frac{17}{2}$. A perpendicular da Figura 4.7 explica por que basta conhecer a distância; as coordenadas do pé seriam uma informação adicional, desnecessária para este pedido.

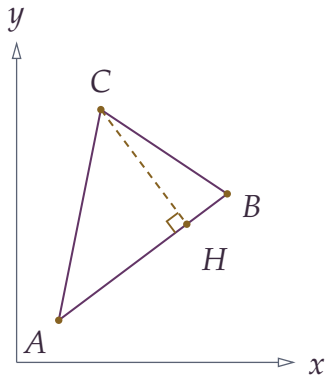


Figura 4.7: A altura CH é perpendicular à reta da base, com $H = \left(\frac{101}{25}, \frac{82}{25}\right)$ e comprimento $\frac{17}{5}$.

4.2 Paralelas e faixas

Corolário 4.2. (Distância entre paralelas). *Considere as retas*

$$r : Ax + By + C_1 = 0 \quad \text{e} \quad s : Ax + By + C_2 = 0,$$

com o mesmo par de coeficientes A, B nas duas equações e $A^2 + B^2 > 0$. A distância entre as retas é

$$d(r,s) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Demonstração.
Para comparar duas retas paralelas, convém escrevê-las com os **mesmos** coeficientes de x e y. Considere $r : Ax + By + C_1 = 0$ e $s : Ax + By + C_2 = 0$. Se $P = (x_0, y_0)$ pertence a r, então $Ax_0 + By_0 = -C_1$.

Por P trace a perpendicular a s e chame de K seu pé. O comprimento PK mede a largura da faixa.

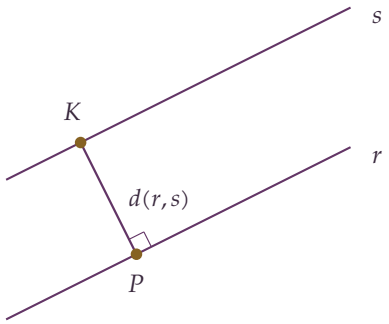


Figura 4.8: A perpendicular mede a largura constante da faixa entre duas paralelas.

A distância de P a s é $\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, independente da escolha de P. Isso define a distância entre as paralelas, nula quando coincidem.

Para um ponto qualquer, a fórmula da distância já demonstrada dá $d(P,r) = h$ se, e somente se, $|Ax + By + C| = h\sqrt{A^2 + B^2}$. Para $h > 0$, os pontos à distância h formam, portanto, as duas paralelas $Ax + By + C = \pm h\sqrt{A^2 + B^2}$. Para $h = 0$, resta a própria reta r. □

Exemplo 4.6. *Antes de subtrair os termos constantes*

(EFOMM 2009, adaptada) Dois lados de um hexágono regular estão contidos nas retas $r : 4x + 3y + 28 = 0$ e $s : 8x + 6y + 15 = 0$. Determine a área do hexágono e entre quais inteiros consecutivos ela se encontra.

Resolução.
As retas são paralelas e distintas. Em um hexágono regular, os únicos pares de lados paralelos são os pares de lados opostos. Portanto, a distância entre r e s é a distância entre dois lados opostos, isto é, o dobro do apótema a, que liga o centro ao ponto médio de um lado.

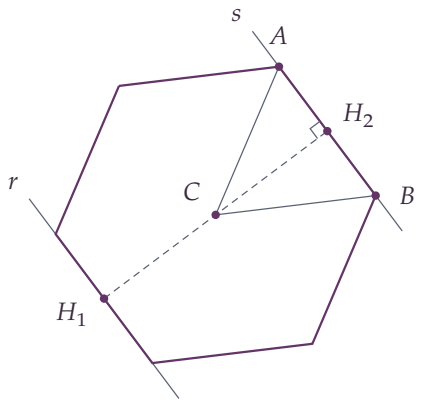


Figura 4.9: Os pés H_1, H_2 ficam nos pontos médios de lados opostos; $CH_1 = CH_2 = a$ e $H_1H_2 = d$. O triângulo CAB é um dos seis triângulos equiláteros.

Antes de medir essa distância, precisamos igualar os coeficientes de x e y. Dividir a equação de s por 2 fornece $s : 4x + 3y + \frac{15}{2} = 0$. Assim,

$$d = \frac{\left|\frac{15}{2} - 28\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{41}{10}, \quad a = \frac{d}{2} = \frac{41}{20}.$$

Não podemos subtrair diretamente 15 e 28, pois as duas equações ainda têm coeficientes diferentes de x e de y.

Os segmentos que ligam o centro aos vértices dividem o hexágono em seis triângulos equiláteros. Se ℓ é o lado, Pitágoras em metade de um deles dá $a^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 3\frac{\ell^2}{4}$. Como os comprimentos são positivos, $\ell = 2\frac{a}{\sqrt{3}}$. Logo, a área é

$$S = 6 \cdot \frac{\ell a}{2} = 2\sqrt{3}a^2 = \frac{1681\sqrt{3}}{200}.$$

Usando $\frac{17}{10} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$ na expressão da área, obtemos

$$\frac{28577}{2000} < S < \frac{11767}{800}.$$

Portanto, $14 < S < 15$.

Exemplo 4.7. *Duas retas possíveis*

Encontre as retas paralelas a $3x - 4y + 2 = 0$ que distam 3 dela.

Resolução.
A direção fixa os coeficientes $3, -4$, e só o termo independente deve mudar: procuramos $3x - 4y + C = 0$. Para usar a distância de ponto a reta, escolhemos $U = (2, 2)$ na reta dada, pois $6 - 8 + 2 = 0$. A distância de U à paralela procurada é $\frac{|6-8+C|}{5}$. Exigir que seja 3 dá $C - 2 = 15$ ou $C - 2 = -15$, logo $C = 17$ ou $C = -13$. As retas são

$3x - 4y + 17 = 0$ e $3x - 4y - 13 = 0$. Em cada uma, a distância de U é 3; o paralelismo torna essa distância a largura constante da faixa. Os dois sinais colocam as respostas em lados opostos da reta dada.

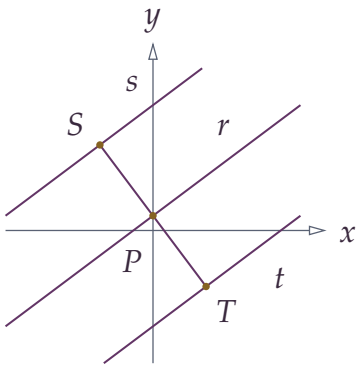


Figura 4.10: A reta dada é r; as respostas de constantes 17 e -13 são s e t, respectivamente. Para $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ em r, suas projeções S em s e T em t satisfazem $SP = PT = 3$.

4.3 Como calcular a medida de um ângulo

Num triângulo retângulo, para um ângulo agudo θ, definimos $\cos\theta$ como a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, e $\operatorname{sen}\theta$ como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Triângulos retângulos com o mesmo ângulo são semelhantes; por isso, essas razões dependem do ângulo, não do tamanho do desenho. Se o cateto adjacente é não nulo, $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Para estender essas definições de 0° a 180°, trace a semicircunferência de raio 1 acima do eixo x, com centro na origem O. Partindo do semieixo horizontal positivo, gire uma semirreta no sentido anti-horário até formar o ângulo θ. Ela encontra a semicircunferência em T. A abscissa de T define $\cos\theta$ e a ordenada define $\operatorname{sen}\theta$.
No primeiro quadrante, a hipotenusa OT mede 1, e as duas coordenadas são os comprimentos dos catetos. Na figura, a abertura ultrapassa 90°. O pé da perpendicular fica à esquerda de O, enquanto T continua acima do eixo horizontal.

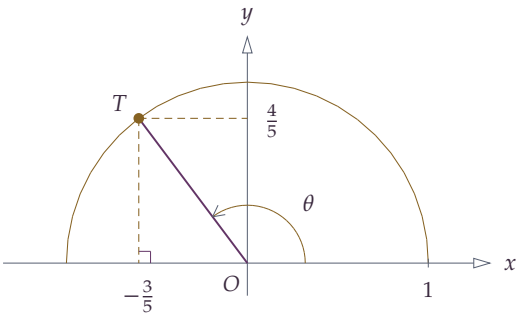


Figura 4.11: Para o ponto $T = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, lemos $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ no eixo horizontal e $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$ no vertical.

A 90°, a abscissa é zero. Entre 90° e 180°, inclusive em 180°, é negativa. Em toda a semicircunferência a ordenada é não negativa. Como $OT = 1$, a fórmula da distância dá $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. A razão $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ fica definida sempre que $\cos\theta \neq 0$, portanto somente 90° fica excluído nesse intervalo.

Teorema 4.3. (Projeções e lei dos cossenos). *Num triângulo, se a é o lado oposto ao ângulo θ formado pelos lados b e c, então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Colocando o vértice do ângulo na origem, $U = (c, 0)$ e o outro lado acima do eixo horizontal, sua extremidade é $V = (b\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$.

Demonstração.
Tome o vértice do ângulo como origem e o lado de comprimento c sobre o semieixo positivo, com extremidade $U = (c, 0)$. Escolha o sentido do eixo vertical de modo que a outra extremidade V fique acima da base. Dividir as coordenadas de V pelo comprimento $OV = b$ dá, por definição, o cosseno e o seno de θ. Assim, $V = (b\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$.
O lado oposto a θ é o segmento UV, de modo que procuramos a distância entre essas duas extremidades.
A perpendicular de V à base mostra a altura e a projeção horizontal.

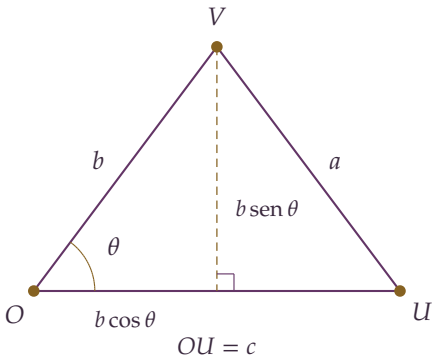


Figura 4.12: A projeção horizontal de um lado permite calcular o lado oposto ao ângulo.

Como $OV = b$, a distância à origem dá $b^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta = b^2$. Dividindo por $b^2 > 0$, obtemos $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. Ao calcular a distância de U a V, essa identidade reúne os termos em b^2:

$$UV^2 = (c - b\cos\theta)^2 + (b\operatorname{sen}\theta)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Esta é a **lei dos cossenos**. Ela continua válida quando o ângulo é obtuso, pois o sinal do cosseno já registra que a projeção ficou no semieixo negativo. □

Exemplo 4.8. *Um ângulo reconhecido pelos comprimentos*

Um triângulo tem lados 5, 5 e 6. Determine o cosseno do ângulo oposto ao lado 6 e decida se esse ângulo é agudo, reto ou obtuso.

Resolução.
Colocamos o vértice do ângulo em $O = (0,0)$ e um dos lados de comprimento 5 sobre o eixo horizontal, com $U = (5,0)$. A outra extremidade é $V = (u,v)$, escolhendo $v > 0$. Os dados impõem

$$u^2 + v^2 = 25, \quad (u-5)^2 + v^2 = 36.$$

Subtrair a primeira igualdade da segunda cancela os dois quadrados e deixa $-10u + 25 = 11$, de onde $u = \frac{7}{5}$. Essa abscissa é a projeção do lado OV sobre OU. Logo,

$$\cos\theta = \frac{OH}{OV} = \frac{\frac{7}{5}}{5} = \frac{7}{25} > 0,$$

e o ângulo é agudo. A ordenada também existe: $v^2 = 25 - \frac{49}{25} = \frac{576}{25}$, com $v = \frac{24}{5} > 0$. A lei dos cossenos reúne essa mesma eliminação em $36 = 25 + 25 - 50\cos\theta$.

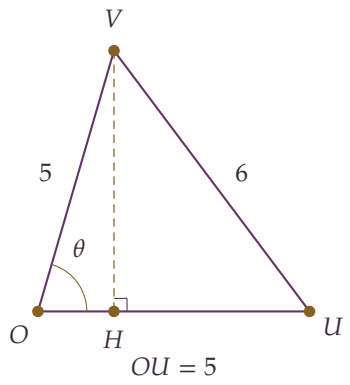


Figura 4.13: O pé H determina a projeção procurada. A abscissa $u = \frac{7}{5}$ é positiva, portanto o ângulo UOV é agudo.

Exemplo 4.9. *Inclinação e coeficiente angular*

Uma reta não vertical sobe 3 unidades quando avançamos 4 unidades para a direita. Qual é a tangente de sua inclinação?

Resolução.
O deslocamento forma um triângulo retângulo de catetos 4 e 3. Assim, a tangente do ângulo que a direção para a direita forma com o eixo x é $\frac{3}{4}$, exatamente o coeficiente angular da reta. Para uma reta descendente, a inclinação convencional fica entre 90° e 180°, com tangente negativa. A vertical tem inclinação 90° e tangente indefinida, o mesmo impedimento que aparece no coeficiente angular.

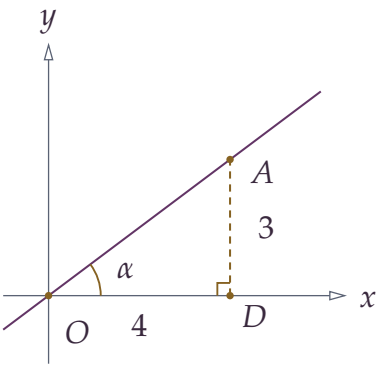


Figura 4.14: Uma reta representativa é $y = 3\frac{x}{4}$. Entre O e $A = (4, 3)$, o triângulo retângulo dá $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

4.4 O menor ângulo entre duas retas

Se atravessamos uma rua em diagonal, o encontro entre a trajetória e a calçada forma dois ângulos suplementares. Para indicar a inclinação de uma reta em relação à outra, usamos o menor desses ângulos. Ele vai de 0° a 90°. Por convenção, vale 0° para retas paralelas, inclusive coincidentes.

Proposição 4.4. (Ângulo entre duas retas pelos coeficientes angulares). *Sejam $r : y = m_1x + b$ e $s : y = m_2x + c$. Se $1 + m_1m_2 \neq 0$, o menor ângulo θ entre elas satisfaz*

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right|.$$

Coeficientes angulares iguais dão $\theta = 0°$. Se $1 + m_1m_2 = 0$, as retas são perpendiculares e $\theta = 90°$.

Demonstração.
Subtraia b de todas as ordenadas de r. A reta $y = m_1x$ passa pela origem e conserva a inclinação α_1 de r. Fazendo o mesmo com s, obtemos $y = m_2x$, de inclinação α_2.

Meça as duas inclinações a partir da mesma horizontal. A abertura entre as direções mede $|\alpha_2 - \alpha_1|$.

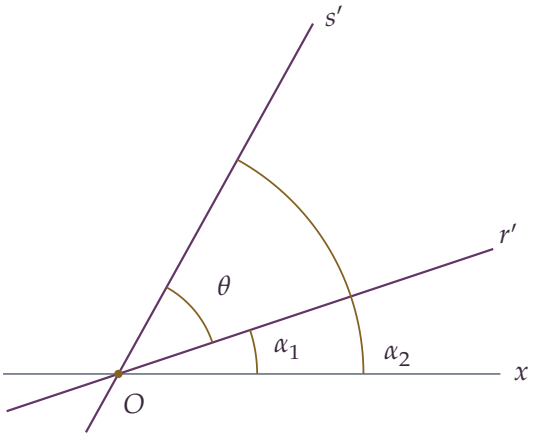


Figura 4.15: As paralelas a r e s pela origem conservam suas inclinações. No caso desenhado, o arco entre elas mede $\alpha_2 - \alpha_1$. As inclinações satisfazem $\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$ e $\operatorname{tg}\alpha_2 = m_2$.

Se a diferença das inclinações excede 90°, o menor ângulo é seu suplemento. Quem já conhece a tangente da diferença pode ler o resultado diretamente desta figura. Quando $1 + m_1 m_2 \neq 0$,

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Trocar a ordem das retas ou tomar o suplemento muda apenas o sinal da tangente. O módulo dá o valor correspondente ao menor ângulo. Podemos descobrir a mesma relação medindo dois segmentos, mesmo que essa identidade trigonométrica seja nova para nós.

Onde aparecem os dois coeficientes? Avance uma unidade para a direita a partir de O. Na primeira reta chegamos a $A = (1, m_1)$ e, na segunda, a $B = (1, m_2)$. A diferença $m_2 - m_1$ é a diferença de suas alturas.

Baixe de B a perpendicular à primeira reta e chame o pé de H.

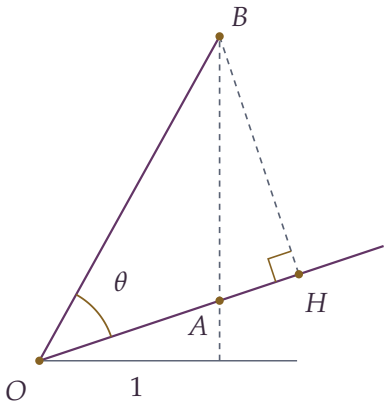


Figura 4.16: Na vertical $x = 1$, o desnível é $|m_2 - m_1|$. O segmento tracejado BH mede a distância de B à primeira reta.

Pela fórmula da distância de um ponto a uma reta, aplicada a $B = (1, m_2)$ e a $y - m_1 x = 0$, o cateto oposto ao ângulo mede

$$BH = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2}}.$$

Como medir o cateto adjacente? Podemos procurar outra distância, agora até a perpendicular à primeira reta que passa por O. Essa reta tem equação $x + m_1 y = 0$: passa pela origem e admite as variações $(-m_1, 1)$, perpendiculares a $(1, m_1)$.
Baixe de B a perpendicular a essa nova reta. Seu pé K completa o retângulo $OHBK$.

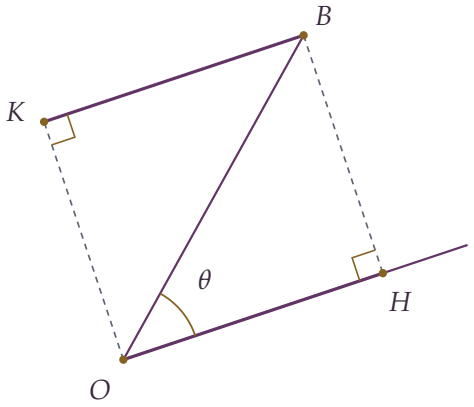


Figura 4.17: O lado BK é paralelo a OH e tem o mesmo comprimento. A perpendicular por O permite medir esse segundo cateto.

Os lados opostos do retângulo $OHBK$ têm o mesmo comprimento. Logo, OH mede a distância de $B = (1, m_2)$ à reta OK, de equação $x + m_1 y = 0$. Pela fórmula da distância,

$$OH = BK = \frac{|1 + m_1 m_2|}{\sqrt{1 + m_1^2}}.$$

Se OH e BH são positivos, o ângulo agudo do triângulo em O é justamente o menor ângulo entre as retas. Isso continua válido quando H fica no prolongamento oposto a OA. Ao dividir BH por OH, cancelamos as raízes e obtemos a tangente anunciada.

As duas construções podem se reduzir a um segmento. Quando $BH = 0$, o ponto B está na primeira reta e $m_2 = m_1$. Quando $OH = 0$, o pé é a origem e a segunda reta é perpendicular à primeira. Isso ocorre exatamente para $m_1 m_2 = -1$ e explica por que precisamos examinar o denominador antes da divisão. □

Se uma das retas for vertical. A vertical faz 90° com a horizontal. Para a outra reta de equação $y = mx + c$, um avanço horizontal de uma unidade produz um desnível de módulo $|m|$. Em relação à vertical, o cateto oposto agora mede 1 e o adjacente, $|m|$. Assim, para $m \neq 0$, vale $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{|m|}$. Se $m = 0$, as retas são perpendiculares. Duas verticais formam ângulo de 0°.

Exemplo 4.10. *Um ângulo de quarenta e cinco graus*

Determine o menor ângulo entre $y = 2x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 4$.

Resolução.
Primeiro localizamos o ponto de interseção das retas: $2x + 1 = \frac{x}{3} - 4$ dá $C = (-3, -5)$. Para medir o ângulo em C, construímos um triângulo retângulo cujos lados partem de C nas duas direções dadas. Avançando uma unidade para a direita sobre $y = 2x + 1$, chegamos a $B = (-2, -3)$. Projetamos B sobre a outra reta, de coeficiente angular $\frac{1}{3}$. A perpendicular por B tem coeficiente -3 e equação $y + 3 = -3(x + 2)$. Sua interseção com $y = \frac{x}{3} - 4$ dá $H = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.
O pé H fecha o triângulo em que vamos medir o ângulo.

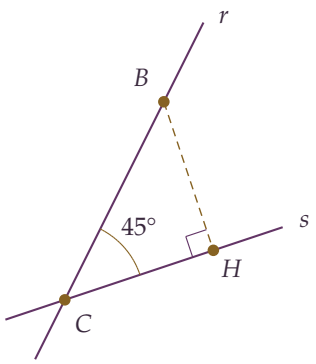


Figura 4.18: A perpendicular BH fecha um triângulo retângulo isósceles. Seus catetos iguais identificam o ângulo de 45° em C.

No triângulo CHB, retângulo em H, os dois catetos têm o mesmo quadrado:

$$CH^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}, \quad BH^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Portanto, ele é isósceles e o ângulo agudo em C mede 45°, que é o menor ângulo entre as retas. A tangente pelo critério geral também vale $\left|\frac{\frac{1}{3}-2}{1+\frac{2}{3}}\right| = 1$: o quociente reúne as duas medidas que acabamos de construir.

Exemplo 4.11. *Uma das retas é vertical*

Calcule o cosseno do menor ângulo entre $x = 2$ e $x - y + 1 = 0$.

Resolução.
Escreva a segunda reta como $y = x + 1$. A cada unidade que avançamos para a direita, subimos também uma unidade. Os catetos do triângulo de inclinação são iguais, logo a reta faz 45° tanto com a horizontal quanto com a vertical $x = 2$. Sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$ e o cosseno pedido é $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

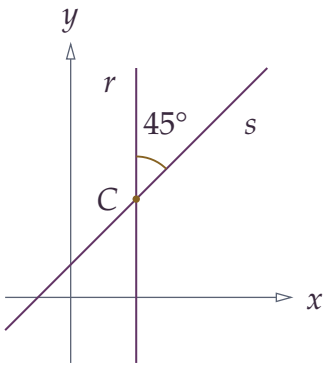


Figura 4.19: A vertical $r : x = 2$ encontra $s : y = x + 1$ em $C = (2, 3)$. O menor ângulo vale 45°.

Exemplo 4.12. *Todas as direções que fazem um ângulo dado*

Quais retas passam pela origem e fazem ângulo de 45° com $y = 2x$?

Resolução.
Primeiro verificamos a direção vertical, que não pode ser escrita $y = mx$. Na reta $y = 2x$, avançar uma unidade para a direita corresponde a subir duas. Para o ângulo com a vertical, o cateto oposto mede 1 e o adjacente mede 2. A tangente é $\frac{1}{2}$, diferente de $\operatorname{tg}(45°) = 1$. Nas demais direções, a reta por O é $y = mx$. O valor $m = -\frac{1}{2}$ produz uma perpendicular à reta dada, com ângulo de 90°, e também é descartado. Para os outros valores, a fórmula da tangente traduz o ângulo pedido na condição $\left|\frac{m-2}{1+2m}\right| = 1$.

As duas possibilidades são $m - 2 = 1 + 2m$ e $m - 2 = -1 - 2m$, que dão $m = -3$ e $m = \frac{1}{3}$. Nenhum deles anula o denominador. Logo, as retas são $y = -3x$ e $y = \frac{x}{3}$.

Também examinamos a vertical, única reta por esse ponto que não se pode escrever com coeficiente angular m. A lista está completa.

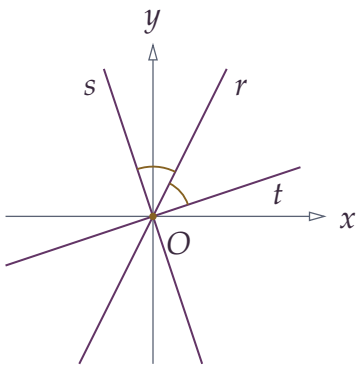


Figura 4.20: As duas respostas são $s : y = -3x$ e $t : y = \frac{x}{3}$. Cada uma faz menor ângulo de 45° com $r : y = 2x$.

4.5 Bissetrizes e igualdade de distâncias

Num ângulo formado por duas semirretas, a bissetriz interna é a semirreta que o divide em duas partes iguais.

Teorema 4.5. (As duas bissetrizes de retas concorrentes). *Para duas retas concorrentes, o conjunto dos pontos igualmente distantes delas é a união de suas duas bissetrizes. Elas são perpendiculares. Para escolher a bissetriz interna de um ângulo, é preciso localizar a região entre suas semirretas.*

Demonstração.
Parta de um ponto da bissetriz interna diferente do vértice e baixe dele as perpendiculares aos lados.
O segmento que une o ponto ao vértice é a hipotenusa comum dos dois triângulos.

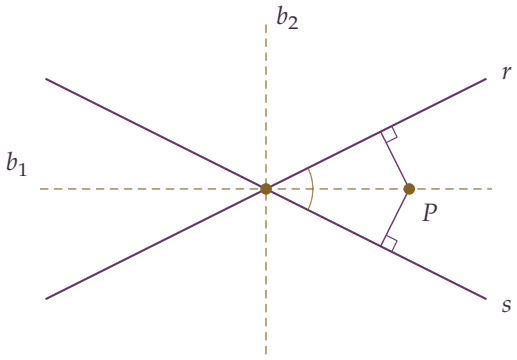


Figura 4.21: Cada bissetriz reúne pontos igualmente distantes das duas retas; a região escolhida determina qual semirreta divide o ângulo.

Como os ângulos no vértice são iguais, os triângulos retângulos são congruentes. Os dois catetos opostos medem as distâncias do ponto às retas e, portanto, são iguais. O mesmo argumento vale em cada um dos quatro ângulos. As bissetrizes de ângulos opostos

prolongam-se na mesma reta. As de dois ângulos adjacentes são perpendiculares, pois suas metades somam $\frac{180°}{2} = 90°$.

Para duas retas concorrentes, escreva

$$r : L_1 = Ax + By + C = 0, \quad s : L_2 = Dx + Ey + F = 0.$$

A igualdade de distâncias torna-se

$$\frac{|L_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|L_2|}{\sqrt{D^2 + E^2}}.$$

Retirar os módulos equivale a escrever

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{Dx + Ey + F}{\sqrt{D^2 + E^2}}.$$

Os dois sinais dão duas equações lineares. Como as retas dadas não são paralelas, nenhuma dessas equações se anula identicamente e as duas representam retas distintas. As duas bissetrizes já construídas estão nesse conjunto; portanto, não restam outros pontos fora delas. □

Exemplo 4.13. *As bissetrizes de um par simétrico*

Encontre as bissetrizes de $r : 3x - 4y = 0$ e $s : 4x - 3y = 0$.

Resolução.
As retas são concorrentes na origem e não têm a mesma direção. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma bissetriz exatamente quando as perpendiculares dele às duas retas têm o mesmo comprimento. Pela distância de ponto a reta, essa igualdade é $\frac{|3x-4y|}{5} = \frac{|4x-3y|}{5}$. Cancelar o fator comum positivo deixa dois sinais: $3x - 4y = \pm(4x - 3y)$. Com o sinal positivo, obtemos $x + y = 0$; com o negativo, $x - y = 0$. As duas respostas são $y = -x$ e $y = x$.
Compare as duas bissetrizes com as retas dadas no primeiro quadrante.

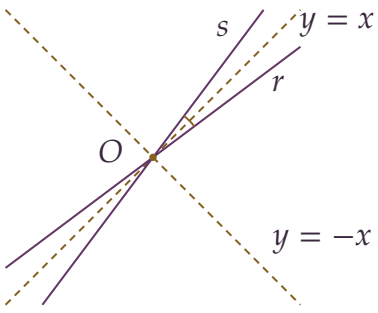


Figura 4.22: As bissetrizes são $y = x$ e $y = -x$. No primeiro quadrante, a semirreta $y = x$ fica no pequeno ângulo entre r e s.

No pequeno ângulo do primeiro quadrante entre as retas de coeficientes angulares $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$, a bissetriz é a semirreta de $y = x$ com $x \geqslant 0$.

Exemplo 4.14. *Uma região escolhe o sinal*

Determine a bissetriz interna do ângulo do triângulo OAB, com $O = (0,0)$, $A = (6,0)$ e $B = (3,4)$, no vértice O.

Resolução.
O lado OA está no eixo horizontal, de equação $y = 0$. Para OB, o coeficiente angular é $\frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$; como a reta passa por O, sua equação é $y = \frac{4}{3}x$, ou $4x - 3y = 0$. A bissetriz reúne pontos igualmente distantes dessas duas retas, dando $|y| = \frac{|4x-3y|}{5}$.

Dentro do ângulo pedido, ficamos acima de OA e abaixo de OB: temos $y \geqslant 0$ e $y \leqslant \frac{4}{3}x$, ou $4x - 3y \geqslant 0$. Esses sinais permitem retirar os dois módulos. Portanto, a equação nesse setor é $5y = 4x - 3y$, ou $y = \frac{x}{2}$.

A outra solução da igualdade de módulos é $y = -2x$, a bissetriz do ângulo suplementar. Para a bissetriz interna como semirreta, acrescentamos $x \geqslant 0$. A região, e não uma regra fixa para o sinal, fez a escolha.

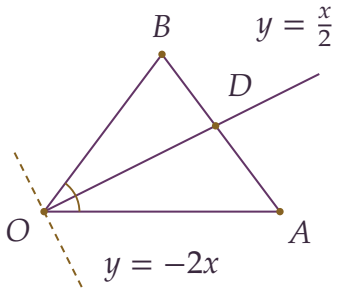


Figura 4.23: A bissetriz interna segue $y = \frac{x}{2}$, $x \geqslant 0$, e encontra AB em $D = \left(\frac{48}{11}, \frac{24}{11}\right)$. A outra bissetriz fica fora do ângulo interno.

Exemplo 4.15. *Equidistância de paralelas*

Determine os pontos igualmente distantes de $x = 1$ e $x = 7$. O resultado são duas bissetrizes?

Resolução.
A igualdade é $|x - 1| = |x - 7|$. Um dos sinais daria $x - 1 = x - 7$, impossível; o outro dá $x - 1 = -x + 7$, isto é, $x = 4$. Todas as ordenadas são permitidas. O lugar é a única reta média entre as paralelas. A hipótese de concorrência no resultado sobre bissetrizes não pode ser descartada. Se as retas coincidissem, todos os pontos do plano teriam distâncias iguais a elas.

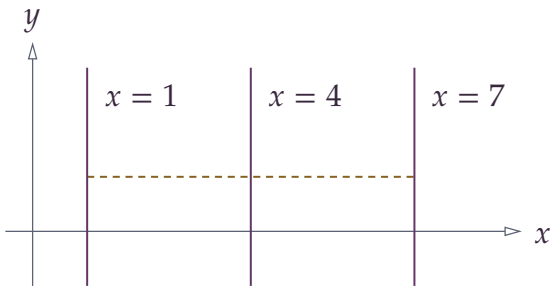


Figura 4.24: A reta média $x = 4$ fica à mesma distância das paralelas $x = 1$ e $x = 7$.

4.6 Refletir um ponto numa reta

Na reflexão em uma reta r, um ponto de r permanece fixo. Para um ponto P fora dela, construímos o pé H e prolongamos PH até um ponto P' do outro lado, com $HP' = HP$. Assim, r é a mediatriz de PP'.

Proposição 4.6. (Reflexão em uma reta). *Para um ponto P fora da reta r, sua imagem P' é o único ponto para o qual r é a mediatriz de PP'. Se H é o pé da perpendicular, as variações de P até H são repetidas de H até P'. Para todo $X \in r$, vale $XP = XP'$. Se $P \in r$, a imagem é o próprio P.*

Demonstração.
O eixo deve dividir PP' ao meio e ser perpendicular a esse segmento. Portanto, o ponto médio será o pé H da perpendicular por P.
Prolongue PH além de H por outro segmento de mesmo comprimento.

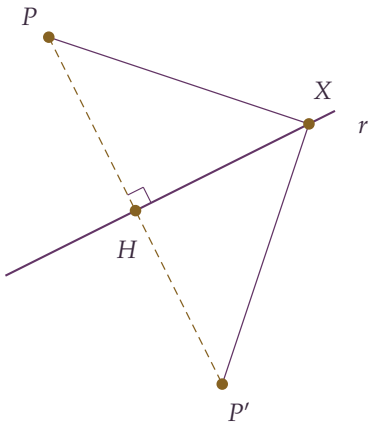


Figura 4.25: O eixo de reflexão é a mediatriz do segmento que une o ponto à sua imagem.

Como H é o ponto médio, $P' = 2H - P$, uma igualdade entendida componente a componente. Para $r : Ax + By + C = 0$, ponha $N = A^2 + B^2 > 0$ e $L = Ax_0 + By_0 + C$. Substituir as coordenadas do pé já deduzidas produz

$$P' = \left(x_0 - 2A\frac{L}{N}, y_0 - 2B\frac{L}{N} \right).$$

Resta mostrar que $XP = XP'$ para todo $X \in r$. Se $P \in r$, então $P' = P$. Se P está fora da reta e $X = H$, a igualdade é a dos comprimentos HP e HP' na construção. Para $X \neq H$, os triângulos retângulos XHP e XHP' têm um cateto comum, XH, e os outros dois de mesmo comprimento. Por Pitágoras, suas hipotenusas também têm o mesmo comprimento. □

Essa propriedade permitirá transformar um caminho quebrado em um segmento.

Exemplo 4.16. *Reflexão numa reta oblíqua*

(EsPCEx 2014, adaptada) Determine o ponto simétrico de $P = (1, 5)$ em relação à reta $r : 2x + 3y - 4 = 0$.

Resolução.
A reta de reflexão deve cortar PP' perpendicularmente em seu ponto médio H. Para localizar H, escrevemos a reta dada como $y = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3}$. A perpendicular por P tem coeficiente $\frac{3}{2}$, pois $\frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$. Como passa por $(1, 5)$, sua equação é $y - 5 = \frac{3}{2}(x - 1)$.

Na interseção das duas retas, $y = \frac{3x+7}{2}$ também deve satisfazer $2x + 3y - 4 = 0$. Substituindo e multiplicando por 2, obtemos $4x + 9x + 21 - 8 = 0$, logo $x = -1$ e $y = 2$. Encontramos $H = (-1, 2)$. Para que ele seja o ponto médio de PP', aplicamos $P' = 2H - P$ a cada coordenada:

$$P' = (2 \cdot (-1) - 1, 2 \cdot 2 - 5) = (-3, -1).$$

De P até H, andamos duas unidades para a esquerda e três para baixo. Repetindo esse deslocamento, chegamos a P'.

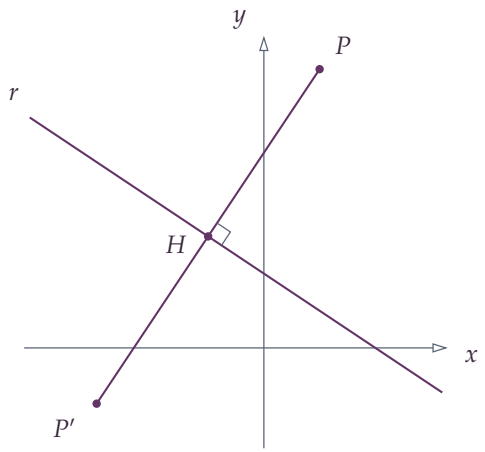


Figura 4.26: A reta r passa por H, o ponto médio de PP', e é perpendicular a esse segmento.

Assim, $PH = HP' = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, e a reta r corta o segmento no ponto médio, como exigia a construção.

Exemplo 4.17. *Qual reta produziu a reflexão?*

Um ponto $P = (1,2)$ foi refletido em $Q = (5,6)$. Determine a reta de reflexão.

Resolução.
Na reflexão, o segmento que liga um ponto à sua imagem cruza o eixo perpendicularmente e fica dividido ao meio. Procuramos, portanto, a mediatriz de PQ.

Vamos construir primeiro a reta PQ. De $P = (1,2)$ até $Q = (5,6)$, a ordenada aumenta $6-2 = 4$ e a abscissa aumenta $5-1 = 4$. O coeficiente angular é $m_{PQ} = \frac{6-2}{5-1} = 1$. Como essa reta passa por P, temos $y - 2 = x - 1$, ou $y = x + 1$. Sua interseção com a mediatriz deve ser o ponto médio

$$H = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (3,4).$$

Em H, o eixo de reflexão cruza o segmento perpendicularmente.

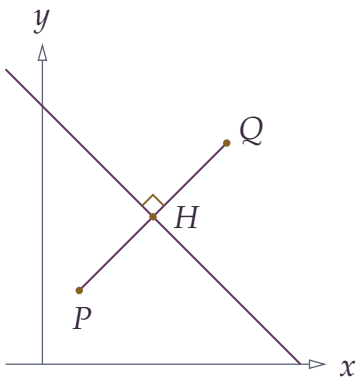


Figura 4.27: O eixo $x + y = 7$ passa pelo ponto médio H e é perpendicular a PQ. Essas duas condições determinam a reflexão.

Falta construir a perpendicular por H. Se m é seu coeficiente angular, a perpendicularidade exige $m \cdot m_{PQ} = -1$. Como $m_{PQ} = 1$, obtemos $m = -1$. A passagem por $H = (3,4)$ fixa a reta procurada:

$$y - 4 = -(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 7 = 0.$$

De fato, $3 + 4 - 7 = 0$, e a reta corta PQ perpendicularmente em seu ponto médio. Como P e Q são distintos, essa mediatriz é única. Se a imagem coincidisse com o ponto original, qualquer reta que passasse por ele o manteria fixo.

Exemplo 4.18. *Refletir uma reta inteira*

Encontre a imagem da reta $y = 2x + 1$ pela reflexão no eixo y.

Resolução.
Refletir no eixo y troca (x,y) por $(u,v) = (-x,y)$. Devemos traduzir a equação dos pontos originais para as coordenadas de suas imagens. Como $x = -u$ e $y = v$, a

condição torna-se $v = -2u + 1$. Portanto, no mesmo sistema de eixos, a reta imagem tem equação $y = -2x + 1$.

A passagem é reversível: todo ponto da nova reta volta a um ponto da reta inicial quando refletido outra vez. Isso prova que encontramos a imagem inteira, e não apenas alguns de seus pontos.

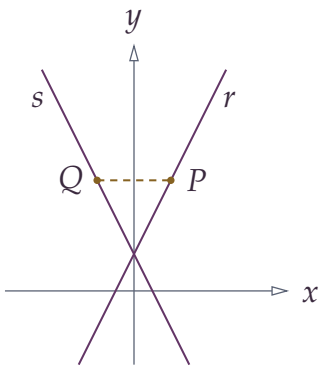


Figura 4.28: A reflexão no eixo y leva $r : y = 2x + 1$ a $s : y = -2x + 1$. Por exemplo, $P = (1, 3)$ vai a $Q = (-1, 3)$.

4.7 O menor percurso com uma parada

Dados dois pontos P e Q num mesmo semiplano aberto determinado por uma reta r, queremos ir de P a Q passando por algum ponto X de r. A desigualdade triangular que usaremos pode ser deduzida da lei dos cossenos: num triângulo de lados a, b, c, temos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \leqslant (a + b)^2$, pois $\cos\theta \geqslant -1$. A raiz não negativa dá $c \leqslant a + b$. No caso não degenerado a desigualdade é estrita; para pontos colineares, somar os comprimentos confirma que a igualdade ocorre quando o ponto intermediário pertence ao segmento entre os extremos.

Refletimos P em P'. Como $PX = P'X$, o percurso mede $P'X + XQ$, sempre maior ou igual a $P'Q$ pela desigualdade triangular.

A igualdade ocorre precisamente quando X pertence ao segmento $P'Q$.

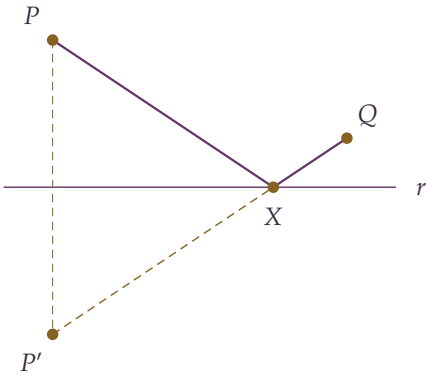


Figura 4.29: Refletir um dos extremos transforma a busca do caminho quebrado mínimo na interseção de um segmento com a reta.

Os pontos P' e Q estão em lados opostos de r, por isso o segmento encontra a reta em um único ponto. Esse ponto pertence a r, e o percurso que passa por ele tem comprimento $P'Q$, o menor possível. Demonstramos, assim, a existência do mínimo e como construí-lo. Se P e Q estiverem originalmente em lados opostos, o próprio segmento PQ já cruza r e fornece o menor percurso, sem reflexão.

Exemplo 4.19. *Ir à margem e voltar*

Dois pontos são $P = (1, 3)$ e $Q = (7, 1)$. Determine onde um percurso de P a Q deve tocar o eixo x para ter o menor comprimento.

Resolução.
Os dois pontos estão acima do eixo. Para qualquer parada X no eixo, a reflexão de P em $P' = (1, -3)$ conserva a distância a X. Assim, $PX + XQ = P'X + XQ \geqslant P'Q$. A igualdade ocorre quando X está no segmento $P'Q$, que cruza o eixo porque seus extremos têm ordenadas de sinais opostos. Uma parametrização é $(x, y) = (1 + 6t, -3 + 4t)$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$. A equação $-3 + 4t = 0$ dá $t = \frac{3}{4}$, logo $X = \left(\frac{11}{2}, 0\right)$.

O menor comprimento é $P'Q = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$. A condição $t \in [0, 1]$ confirma que a interseção está no segmento, onde se alcança a igualdade triangular.

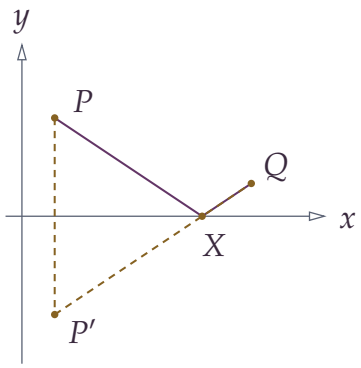


Figura 4.30: Refletir $P = (1, 3)$ em $P' = (1, -3)$ torna retilíneo o percurso mínimo. O toque é $X = \left(\frac{11}{2}, 0\right)$.

Exemplo 4.20. *A parada está limitada a um trecho*

Nos dados do exemplo anterior, a parada deve ocorrer no segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ do eixo x. Qual é o melhor ponto?

Resolução.
O ponto ideal anterior tem abscissa $\frac{11}{2}$, fora do trecho permitido. Precisamos discutir o problema restrito, em vez de aceitar o antigo mínimo. Para $X = (x, 0)$ no intervalo permitido, os comprimentos são

$$PX = \sqrt{(1-x)^2 + 9}, \quad XQ = \sqrt{(7-x)^2 + 1}.$$

Quando x aumenta de 0 até 1, as duas diferenças horizontais, $1 - x$ e $7 - x$, são não negativas e diminuem. Seus quadrados diminuem e as raízes preservam essa ordem. Assim, as duas parcelas diminuem ao deslocarmos a parada para a direita.

O mínimo ocorre em $X = (1, 0)$ e vale $3 + \sqrt{37}$. A reflexão resolveu primeiro o problema sobre a reta inteira; a restrição foi analisada separadamente e mudou tanto o ponto quanto o comprimento mínimo.

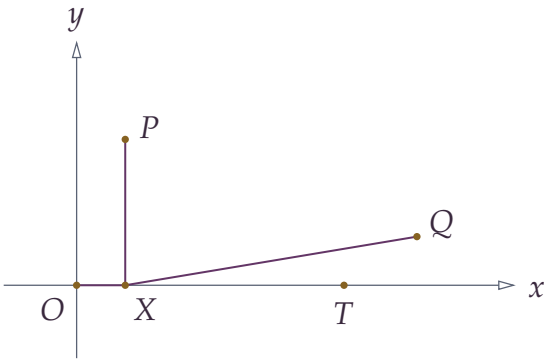


Figura 4.31: O melhor ponto permitido é $X = (1, 0)$. O mínimo sem restrição, em $T = \left(\frac{11}{2}, 0\right)$, fica fora do segmento OX.

4.8 Distância orientada e escolha de uma região +

Fixada uma escrita $L(x,y) = Ax + By + C$, com $N = A^2 + B^2 > 0$, chamamos $\delta(P) = \frac{L(P)}{\sqrt{N}}$ de distância orientada. Seu módulo é a distância usual; seu sinal distingue os dois semiplanos. Multiplicar a equação por um número positivo preserva δ, mas multiplicá-la por um número negativo troca sua orientação. A reta, por si só, não determina qual dos semiplanos recebe o sinal positivo.

Para ver como o sinal muda, percorra o segmento de P até Q. À fração t do percurso, cada coordenada é a de P mais t vezes a variação até Q. Substituindo essas coordenadas em L, obtemos $L(P) + t(L(Q) - L(P))$. Para $0 \leqslant t \leqslant 1$, esse valor percorre o intervalo entre $L(P)$ e $L(Q)$. Se os sinais são opostos, ele passa por zero uma única vez e o segmento cruza a reta. Se ambos são positivos ou ambos negativos, todo o segmento permanece no mesmo semiplano.

Exemplo 4.21. *Uma condição de lado evita a resposta excedente*

Encontre os pontos do eixo y que distam 2 de $3x + 4y - 5 = 0$ e estão no mesmo semiplano que a origem.

Resolução.
A origem fornece $L(0,0) = -5 < 0$, fixando o lado requerido. Um ponto do eixo y é $(0,b)$; sua distância orientada deve ser -2, não $+2$. Logo, $\frac{4b-5}{5} = -2$, dando $b = -\frac{5}{4}$.

O outro ponto que satisfaz apenas a distância, de ordenada $\frac{15}{4}$, tem $L > 0$ e é excluído pela condição de lado. Trabalhar com o sinal desde o início evita produzir uma posição incompatível com o enunciado.

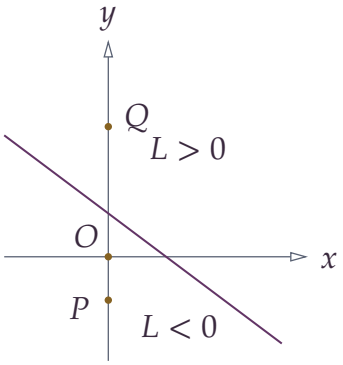


Figura 4.32: A origem e $P = \left(0, -\frac{5}{4}\right)$ têm $L < 0$. O outro candidato, $Q = \left(0, \frac{15}{4}\right)$, tem $L > 0$ e não atende à condição de lado.

4.9 Exercícios

Distâncias, projeções e faixas

4.1. Determine a distância de $P = (2, 3)$ a $3x + 4y - 3 = 0$ e seu pé da perpendicular. Confira que o pé pertence à reta.

4.2. Para quais valores reais de c a reta $2x - y + c = 0$ fica a distância $\sqrt{5}$ de $P = (1, 2)$?

4.3. Determine a distância de $P = (0, 3)$ à reta $y = 0$ e ao segmento de extremos $A = (2, 0)$ e $B = (5, 0)$. Justifique por que as respostas diferem.

4.4. O triângulo tem vértices $A = (0, 1)$, $B = (4, 3)$ e $C = (1, 6)$. Calcule a altura relativa a AB e a área.

4.5. Calcule a distância entre $3x - 4y + 1 = 0$ e $6x - 8y + 22 = 0$. Determine também a reta situada a igual distância das duas.

4.6. Descreva por uma desigualdade, sem módulo, todos os pontos cuja distância a $3x + 4y - 10 = 0$ é no máximo 2. Identifique as retas da fronteira.

Ângulos e direções

4.7. Dois lados de um triângulo medem 2 e 3. O pé da perpendicular baixada da extremidade livre do lado de comprimento 2 à reta do lado de comprimento 3 dista uma unidade do vértice comum. Quanto pode medir o terceiro lado? Se ele mede $\sqrt{7}$, determine o ângulo entre os lados dados.

4.8. Determine o ângulo entre $2x - y = 1$ e $x + 2y = 3$. Explique por que suas posições em relação à origem não interferem na resposta.

4.9. Determine o cosseno e a tangente do menor ângulo entre $x = -2$ e $3x - 4y + 1 = 0$.

4.10. Encontre todas as retas que passam por $(2, -1)$ e fazem ângulo de $45°$ com o eixo x. Verifique separadamente a direção vertical.

Bissetrizes e regiões

4.11. Determine as duas bissetrizes de $x = 0$ e $3x + 4y = 0$.

4.12. No triângulo OAB, com $O = (0, 0)$, $A = (6, 0)$ e $B = (0, 8)$, encontre a interseção da bissetriz interna do ângulo em O com o lado AB.

4.13. Determine o lugar dos pontos equidistantes de $x + 2y - 3 = 0$ e $2x + 4y + 14 = 0$. Depois discuta o que mudaria se a segunda equação fosse $2x + 4y - 6 = 0$.

4.14. * Dentro da região $x > 0$, $y > 0$ e $x + y < 6$, determine o ponto igualmente distante das três retas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 6$. Justifique sua unicidade.

Reflexões

4.15. Reflita o ponto $(3, 1)$ na reta $x - y = 0$. Confira o ponto médio e a perpendicularidade.

4.16. Um ponto $P = (-2, 1)$ tem imagem $Q = (4, 3)$ por uma reflexão. Determine o eixo dessa reflexão.

4.17. Aplique a reflexão na reta $x = 1$ ao conjunto definido por $x^2 + y^2 = 9$. Obtenha uma equação do conjunto imagem e prove a recíproca.

4.18. Um ponto é refletido primeiro em $x = 0$ e depois em $x = 3$. Determine suas coordenadas finais. O que acontece se a ordem das reflexões for invertida?

Percursos e restrições

4.19. Para $P = (-2, 2)$ e $Q = (4, 4)$, encontre o ponto X do eixo x que minimiza $PX + XQ$ e o valor mínimo.

4.20. Para $P = (0, 3)$ e $Q = (6, -1)$, minimize $PX + XQ$ com X no eixo x. Explique por que refletir um extremo não é necessário.

4.21. No exercício com $P = (-2, 2)$ e $Q = (4, 4)$, limite a parada ao trecho $5 \leqslant x \leqslant 7$ do eixo x. Determine o mínimo sob essa nova condição e justifique-o sem derivadas.

Sinais e comparação de medidas

4.22. $_+$ Use a orientação dada por $L(x, y) = 2x - y + 1$. Quais pontos do eixo y estão a distância $\frac{3}{\sqrt{5}}$ da reta $L = 0$ e no mesmo semiplano que $(0, 0)$?

4.23. Prove que a soma das distâncias de um ponto às retas $y = 1$ e $y = 5$ é pelo menos 4. Descreva todos os pontos em que a igualdade ocorre.

4.24. * Entre os pontos da reta $x + y = 6$, encontre aquele em que a maior das distâncias aos dois eixos é a menor possível. Prove a unicidade.

4.10 Soluções dos exercícios

Distâncias, projeções e faixas

Exercício 4.1.

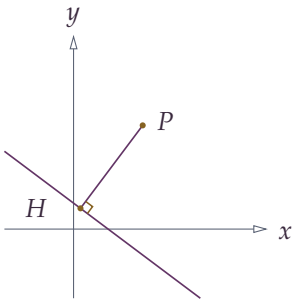


Figura 4.33: A perpendicular escolhe o ponto mais próximo

Procuramos a interseção da reta dada com a perpendicular por $P = (2, 3)$, pois é ali que a distância mínima é atingida. A reta $3x + 4y - 3 = 0$ tem coeficiente angular $-\frac{3}{4}$; sua perpendicular tem coeficiente $\frac{4}{3}$, com produto -1. A passagem por P fornece $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2)$, ou $y = \frac{4x+1}{3}$. Substituir na reta dada e multiplicar por 3 produz $9x + 16x + 4 - 9 = 0$, de onde $x = \frac{1}{5}$. Então $y = \frac{\frac{4}{5}+1}{3} = \frac{3}{5}$, logo

$$H = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Substituindo, $\frac{3}{5} + \frac{12}{5} - 3 = 0$, de modo que H está na reta. O deslocamento de H até P tem componentes $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e comprimento 3, conferindo a medida.

Exercício 4.2.

A direção já está fixada pelos coeficientes $2, -1$; a incógnita c escolhe a posição da paralela.

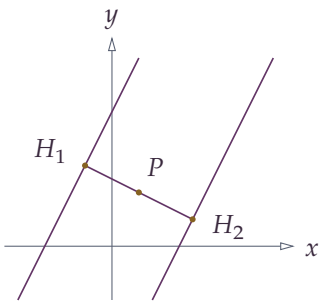


Figura 4.34: Duas paralelas a igual distância do ponto

Para impor a distância de $P = (1, 2)$, usamos a distância de ponto a reta. No ponto P, a expressão da reta vale $2 - 2 + c = c$. A condição de distância é $\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, equivalente a $|c| = 5$. Portanto, $c = 5$ ou $c = -5$. Em ambos os casos o par de coeficientes $(2, -1)$ é

não nulo, e a fórmula realmente se aplica a uma reta. As duas posições ficam em lados opostos de P.

Exercício 4.3.

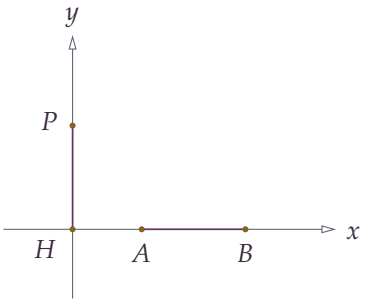


Figura 4.35: O pé na reta está fora do segmento

O pé da perpendicular de P à reta é $(0, 0)$, e a distância à reta vale 3. Esse pé não pertence ao segmento, cujos pontos são $(t, 0)$ com $2 \leqslant t \leqslant 5$. A distância ao quadrado é $t^2 + 9$; no intervalo, t é positivo e o menor quadrado ocorre em $t = 2$. Assim, o ponto mais próximo do segmento é A, e a distância é $\sqrt{13}$. A reta oferece pontos que a restrição ao segmento retirou.

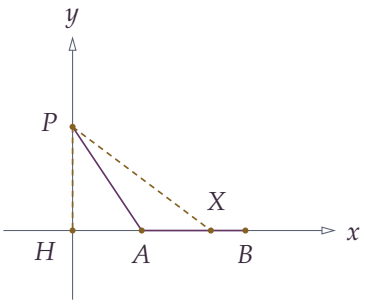


Figura 4.36: Com a restrição, a chegada muda para A

Exercício 4.4.

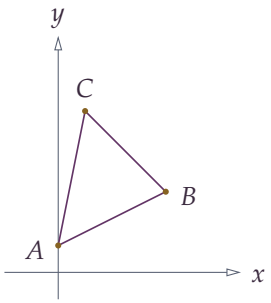


Figura 4.37: A base oblíqua no triângulo dado

Para achar a altura relativa a AB, precisamos da reta que contém essa base. Seu coeficiente angular é $\frac{3-1}{4-0} = \frac{1}{2}$. Usando $A = (0, 1)$, a equação fundamental da reta dá $y - 1 = \frac{1}{2}x$, isto é, $x - 2y + 2 = 0$.

A distância de C a essa reta fornece a altura:

$$h = \frac{|1 - 12 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

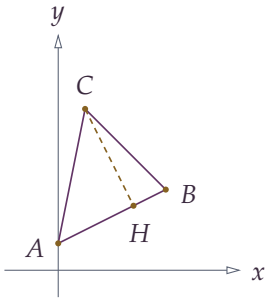


Figura 4.38: A altura é perpendicular à reta da base

A base mede $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. Portanto, a área é $\frac{2\sqrt{5} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}}}{2} = 9$. Pela fórmula do determinante, a área seria $\frac{|4 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{2} = 9$, confirmando o resultado.

Exercício 4.5.

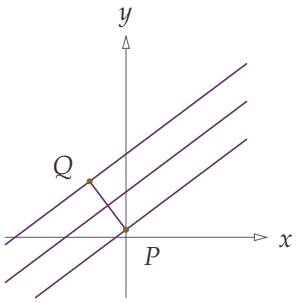


Figura 4.39: Normalizar antes de comparar as paralelas

As duas retas são paralelas; sua distância é o comprimento de qualquer segmento perpendicular a ambas cujas extremidades estejam uma em cada reta. Dividimos a segunda equação por 2, obtendo $3x - 4y + 11 = 0$. Escolhemos $U = (1, 1)$ na primeira reta, pois $3 - 4 + 1 = 0$. Sua distância à segunda é $\frac{|3-4+11|}{5} = 2$; o paralelismo torna esse valor a largura da faixa inteira. Para achar a reta média, escrevemos a igualdade $|3x - 4y + 1| = |3x - 4y + 11|$. O sinal positivo daria $1 = 11$, impossível; o negativo fornece $6x - 8y + 12 = 0$. Logo, a reta procurada é $3x - 4y + 6 = 0$, a distância 1 de cada uma. Podemos comparar as expressões diretamente porque já igualamos os coeficientes de x e de y nas duas equações.

Exercício 4.6.

A distância é $\frac{|3x+4y-10|}{5}$.

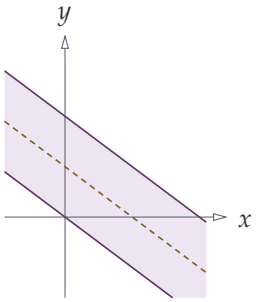


Figura 4.40: A distância máxima recorta uma faixa fechada

Pedir que ela seja no máximo 2 equivale a $-10 \leqslant 3x + 4y - 10 \leqslant 10$, ou

$$0 \leqslant 3x + 4y \leqslant 20.$$

A fronteira é formada por $3x + 4y = 0$ e $3x + 4y = 20$, ambas incluídas. Os pontos interiores satisfazem as duas desigualdades estritas. Juntando os pontos interiores e os de fronteira, obtemos a faixa fechada entre as duas paralelas.

Ângulos e direções

Exercício 4.7.

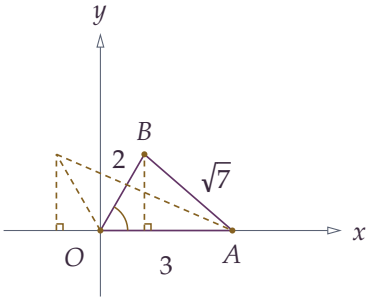


Figura 4.41: Dois pés possíveis, em lados opostos de O

Escolha o vértice comum como $O = (0, 0)$ e a extremidade do lado de comprimento 3 como $A = (3, 0)$. Refletir o desenho no eixo horizontal conserva os comprimentos e o ângulo pedido, por isso podemos tomar a outra extremidade $B = (u, v)$ acima do eixo. O pé da perpendicular é $(u, 0)$. Sua distância a O vale 1, logo $u = 1$ ou $u = -1$. Em ambos os casos $OB^2 = u^2 + v^2 = 4$ dá $v = \sqrt{3}$.

Os dois valores de u fornecem

$$u = 1: \quad AB^2 = (1 - 3)^2 + 3 = 7;$$

$$u = -1: \quad AB^2 = (-1 - 3)^2 + 3 = 19.$$

As duas ordenadas positivas constroem triângulos, portanto os dois comprimentos são possíveis. O dado $AB = \sqrt{7}$ seleciona $u = 1$. Nesse caso o pé está entre O e A, e o cosseno do ângulo em O é $\frac{1}{2}$, razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa OB. Logo o ângulo mede 60°.

Exercício 4.8.

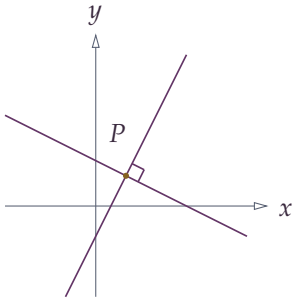


Figura 4.42: A posição do ponto de interseção não altera as direções

Isolando y nas duas equações, lemos os coeficientes angulares 2 e $-\frac{1}{2}$. Seu produto é -1, portanto as retas são perpendiculares e formam 90°. Os termos constantes determinam por onde passam as retas, mas não alteram suas direções. A mesma conclusão valeria para quaisquer constantes nesses dois primeiros membros.

Exercício 4.9.

A segunda reta tem equação $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Ao avançar 4 unidades, subimos 3, formando uma hipotenusa de comprimento 5.

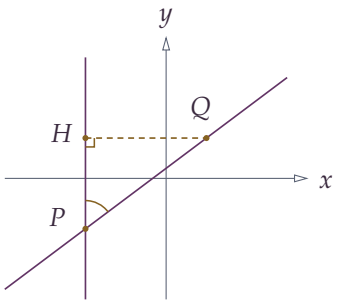


Figura 4.43: Uma vertical e um triângulo de projeções

Medimos o ângulo com a vertical $x = -2$, por isso o cateto adjacente é o vertical, de comprimento 3, e o cateto oposto mede 4. Assim, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3}$.

Exercício 4.10.

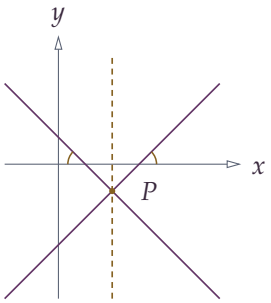


Figura 4.44: As duas inclinações possíveis pelo ponto dado

Uma vertical faz 90° com o eixo x e é descartada. Para uma reta não vertical pelo ponto $(2, -1)$, a forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ dá $y + 1 = m(x - 2)$. Falta determinar o coeficiente m pelo ângulo pedido. Com o eixo de coeficiente angular zero, a tangente do menor

ângulo é $|m|$. Portanto, $|m| = 1$, dando $y + 1 = x - 2$ ou $y + 1 = -(x - 2)$. As respostas são $y = x - 3$ e $y = -x + 1$; ambas passam pelo ponto dado.

Bissetrizes e regiões

Exercício 4.11.

As distâncias iguais produzem $|x| = \frac{|3x+4y|}{5}$.

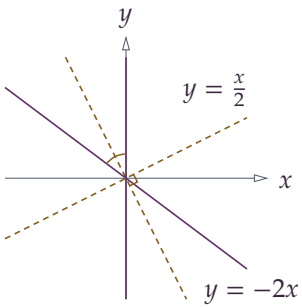


Figura 4.45: As duas bissetrizes são perpendiculares

Com os dois sinais, $5x = 3x + 4y$ ou $5x = -3x - 4y$. Obtemos, respectivamente, $y = \frac{x}{2}$ e $y = -2x$. Os coeficientes angulares têm produto -1, confirmando que as duas bissetrizes são perpendiculares. Nenhuma condição de região foi dada, por isso ambas devem permanecer.

Exercício 4.12.

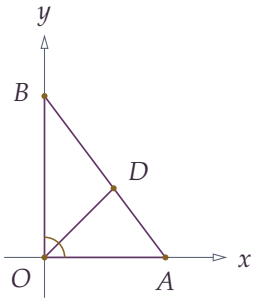


Figura 4.46: A região do triângulo seleciona a semirreta interna

O ângulo em O é o primeiro quadrante. Sua bissetriz interna é a semirreta $y = x$, $x \geqslant 0$, pois iguala as distâncias aos dois eixos dentro dessa região. Falta determinar onde ela encontra o lado oposto.

A reta AB corta os eixos em $A = (6, 0)$ e $B = (0, 8)$; por isso, a equação segmentária dá $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$. Multiplicando por 24, obtemos $4x + 3y = 24$. Substituir $y = x$ fornece $7x = 24$, logo a interseção é $\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right)$. As coordenadas são positivas e satisfazem a equação do lado; além disso, $0 < \frac{24}{7} < 6$ e $0 < \frac{24}{7} < 8$, confirmando a posição no segmento.

Exercício 4.13.

A segunda reta, normalizada, é $x + 2y + 7 = 0$.

A igualdade de distâncias é $|x + 2y - 3| = |x + 2y + 7|$.

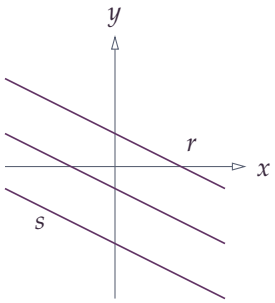


Figura 4.47: A reta média entre paralelas distintas

O sinal positivo é impossível; o negativo dá $2x + 4y + 4 = 0$. O lugar é a reta $x + 2y + 2 = 0$.

Na segunda situação, dividir $2x + 4y - 6 = 0$ por 2 reproduz a primeira reta. Então as duas distâncias são iguais para qualquer ponto do plano. A descrição muda de uma reta para o plano inteiro porque as retas dadas passaram de paralelas distintas a coincidentes.

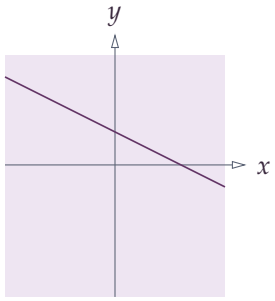


Figura 4.48: Retas coincidentes têm distâncias iguais em todo o plano

Exercício 4.14. *

Os dados colocam o ponto dentro do triângulo limitado pelas três retas. Como $x, y > 0$, as distâncias aos eixos são x e y; sua igualdade exige $x = y = a > 0$.

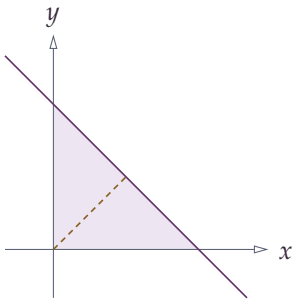


Figura 4.49: Igualar as distâncias aos eixos escolhe uma diagonal

A terceira condição de região fornece $2a < 6$. A distância a $x + y - 6 = 0$ é, portanto, $\frac{6-2a}{\sqrt{2}}$, com o sinal já determinado.

A igualdade restante é $a = \frac{6-2a}{\sqrt{2}}$, de onde $a = \frac{6}{2+\sqrt{2}} = 6 - 3\sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} < 2$, temos $a > 0$; como $\sqrt{2} > 1$, temos $a < 3$. Assim, o ponto $\left(6 - 3\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2}\right)$ está na região exigida e satisfaz as três distâncias. A primeira igualdade reduziu tudo a um único número, e a segunda foi uma equação linear com coeficiente não nulo; por isso, o ponto é único.

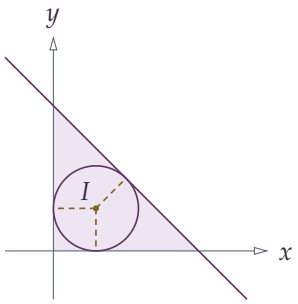


Figura 4.50: O único centro tem três perpendiculares iguais

Reflexões

Exercício 4.15.

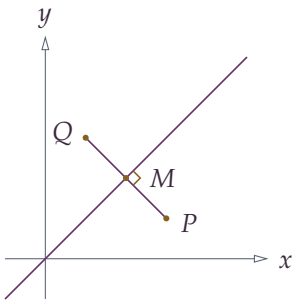


Figura 4.51: O eixo é a mediatriz entre ponto e imagem

O eixo é $y = x$, de coeficiente angular 1. Para construir a imagem de $P = (3, 1)$, traçamos por ele a perpendicular de coeficiente -1: $y - 1 = -(x - 3)$, ou $x + y = 4$. Sua interseção com $y = x$ é $H = (2, 2)$. De P até H, andamos uma unidade para a esquerda e uma para cima; repetir o deslocamento depois de H produz $P' = (1, 3)$. Assim, H é o ponto médio de PP'. A reta que une os pontos tem direção $(-2, 2)$ e coeficiente angular -1, perpendicular ao eixo de coeficiente angular 1. As duas propriedades conferem a construção geométrica.

Exercício 4.16.
A reflexão coloca o eixo na mediatriz de PQ.

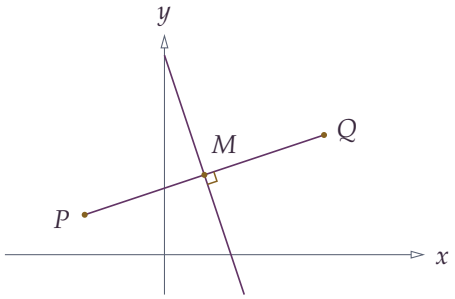


Figura 4.52: A imagem e o ponto original determinam o eixo

Precisamos, portanto, do ponto médio do segmento e da direção perpendicular à sua reta. Pelas médias das coordenadas,

$$M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2).$$

O coeficiente angular de PQ é $\frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$. A reta passa por $P = (-2, 1)$, logo tem equação $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2)$. Para o eixo r, o critério de perpendicularidade exige $m_r \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -1$, de onde $m_r = -3$. Usando o ponto M na equação fundamental da reta, encontramos

$$y - 2 = -3(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0.$$

Para conferir, M satisfaz essa equação e $PM = MQ = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Como M é o ponto médio de PQ e as retas são perpendiculares, a reflexão nesse eixo leva P a Q. O primeiro membro também vale -10 em P e 10 em Q, confirmando o mesmo afastamento em lados opostos. Como os pontos são distintos, a mediatriz é única.

Exercício 4.17.
A reflexão na vertical $x = 1$ conserva a ordenada. Se (u, v) é a imagem de (x, y), o ponto médio entre os dois tem abscissa 1, logo $\frac{x+u}{2} = 1$. Portanto, $u = 2 - x$ e $v = y$, inclusive para um ponto sobre o próprio eixo de reflexão.

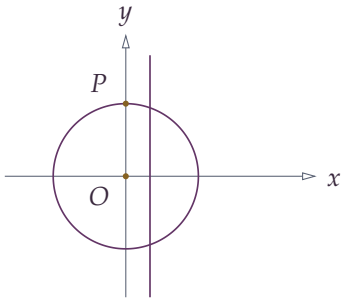


Figura 4.53: Uma circunferência antes da reflexão

Para escrever a condição sobre a imagem, usamos a transformação inversa, que é a mesma reflexão: $x = 2 - u$, $y = v$. Então $x^2 + y^2 = 9$ torna-se $(u - 2)^2 + v^2 = 9$.

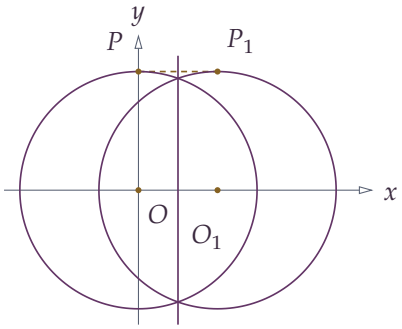


Figura 4.54: Refletir todos os pontos desloca também o centro

Reciprocamente, se (u, v) satisfaz essa nova equação, o ponto $(2-u, v)$ satisfaz a equação original e tem imagem (u, v). Logo, a equação descreve exatamente o conjunto imagem, não apenas uma condição necessária.

Exercício 4.18.
Começando por $P = (x, y)$, a reflexão em $x = 0$ dá $(-x, y)$.

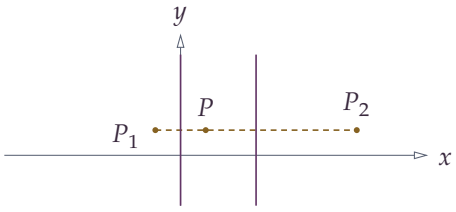


Figura 4.55: Referência $P = (1, 1)$: primeiro em $x = 0$, depois em $x = 3$

Na reflexão em $x = 3$, a média da abscissa $-x$ com a nova abscissa precisa ser 3. A nova vale, portanto, $6 - (-x)$, e a imagem final é $(x + 6, y)$, uma translação de seis unidades para a direita.

Na ordem inversa, a primeira imagem é $(6 - x, y)$ e a segunda, $(x - 6, y)$, seis unidades para a esquerda. Portanto, a ordem importa. Os dois deslocamentos têm comprimentos iguais e sentidos opostos, o dobro da distância entre os eixos de reflexão.

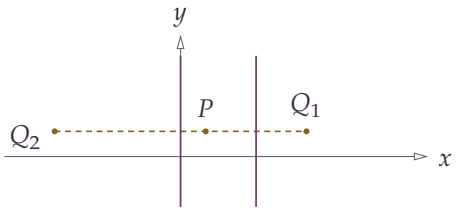


Figura 4.56: Inverter a ordem inverte o deslocamento final

Percursos e restrições

Exercício 4.19.
Os dois extremos estão acima do eixo.

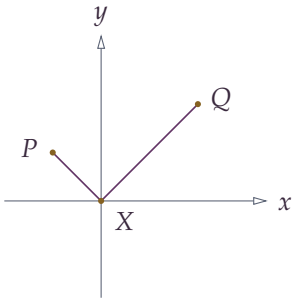


Figura 4.57: Uma parada obrigatória no eixo horizontal

O simétrico de P em relação ao eixo é $P' = (-2, -2)$. Cada ponto X do eixo satisfaz $PX = P'X$. Pela desigualdade triangular,

$$PX + XQ = P'X + XQ \geqslant P'Q.$$

O segmento $P'Q$ tem parametrização $(-2 + 6t, -2 + 6t)$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$. Sua interseção com o eixo ocorre em $t = \frac{1}{3}$, isto é, $X = (0, 0)$.

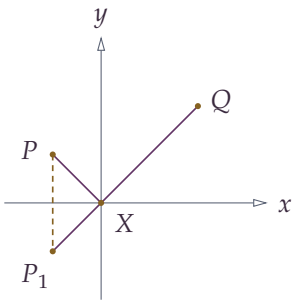


Figura 4.58: A reflexão transforma a igualdade em alinhamento

Esse ponto está no segmento e, portanto, atinge a igualdade triangular. O mínimo é $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. A condição de igualdade também mostra que não há outra parada ótima.

Exercício 4.20.
Agora o segmento direto PQ já atravessa o eixo x.

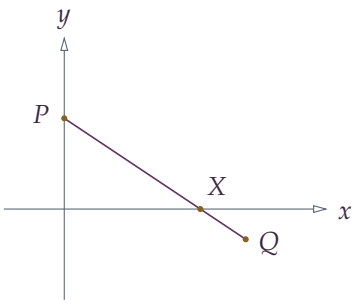


Figura 4.59: O próprio segmento já satisfaz a parada

A desigualdade triangular dá $PX + XQ \geqslant PQ$; basta encontrar a interseção do segmento com o eixo para obter um percurso de comprimento PQ. Escrevendo $(x, y) = (6t, 3 - 4t)$, obtemos $t = \frac{3}{4}$ e $X = \left(\frac{9}{2}, 0\right)$. O mínimo é $\sqrt{6^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{13}$.

O parâmetro está entre 0 e 1, como era necessário. A reflexão usada para extremos no mesmo semiplano não é necessária aqui, pois o caminho reto já respeita a parada obrigatória.

Exercício 4.21.

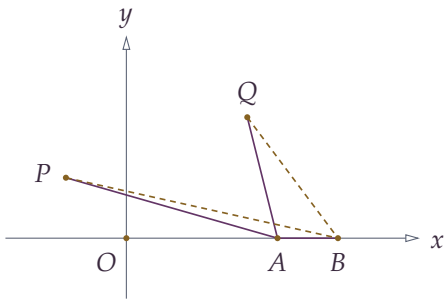


Figura 4.60: A parada livre foi excluída do intervalo

O ponto ótimo sobre a reta inteira era a origem, agora proibida. No trecho permitido, $X = (x, 0)$ tem $5 \leqslant x \leqslant 7$, de modo que $x + 2$ e $x - 4$ são positivos. Os comprimentos

$$PX = \sqrt{(x+2)^2 + 4}, \quad XQ = \sqrt{(x-4)^2 + 16}$$

crescem quando x cresce nesse intervalo. Portanto, ambos são menores no extremo esquerdo, $x = 5$. A parada ótima é $(5, 0)$, e o mínimo é $\sqrt{53} + \sqrt{17}$. A monotonicidade das duas diferenças positivas prova a conclusão sem derivadas.

Sinais e comparação de medidas

Exercício 4.22. +

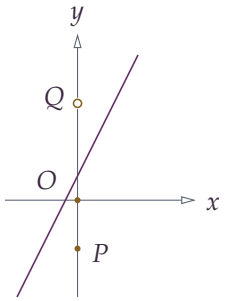


Figura 4.61: O mesmo semiplano seleciona o sinal da distância

A origem tem $L(0, 0) = 1 > 0$, fixando o semiplano positivo. Para um ponto $(0, b)$, a condição de distância orientada é $\frac{1-b}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Logo, $b = -2$, e a única resposta é $(0, -2)$.

O outro sinal da distância não orientada daria $b = 4$, no semiplano oposto; a condição de lado o exclui.

Exercício 4.23.

Um ponto (x, y) tem soma de distâncias $|y - 1| + |y - 5|$, independente de x.

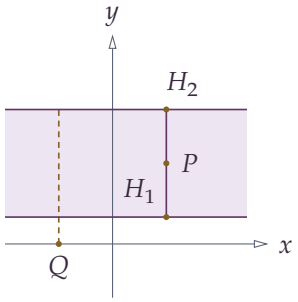


Figura 4.62: Entre as duas paralelas, os afastamentos se completam

Entre as ordenadas 1 e 5, inclusive, a soma vale $(y-1)+(5-y)=4$. Fora desse intervalo, ela aumenta. Abaixo de 1, somamos $1-y$ e $5-y$, obtendo $6-2y>4$. Acima de 5, somamos $y-1$ e $y-5$, obtendo $2y-6>4$.

Os três casos cobrem todos os pontos. O menor valor é 4, atingido em toda a faixa fechada $1 \leqslant y \leqslant 5$, incluindo as duas retas. Encontrar um ponto onde a soma vale 4 não bastaria para descrever todos os pontos de igualdade.

Exercício 4.24. *

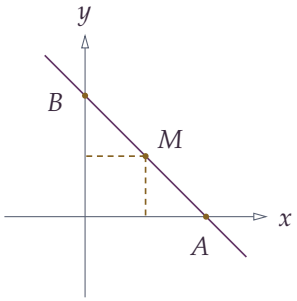


Figura 4.63: Equilibrar os dois afastamentos ao longo da reta

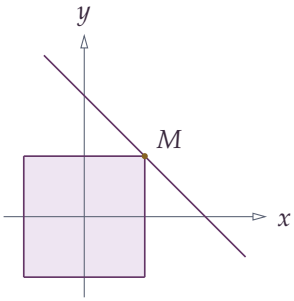


Figura 4.64: Um único ponto satisfaz as duas desigualdades

Na primeira figura, as distâncias de (x,y) aos eixos são $|x|$ e $|y|$. Se ambas fossem menores que 3, teríamos $x+y<6$, o que contradiz a equação da reta. Em $M=(3,3)$, as duas valem 3. Logo, a menor distância máxima é 3.

Poderia haver outro ponto de mínimo? Ele teria de satisfazer $|x| \leqslant 3$ e $|y| \leqslant 3$, ou seja, pertencer ao quadrado da segunda figura. Como $x \leqslant 3$ e $y \leqslant 3$, a soma só chega a 6 quando $x=y=3$. Assim, a reta encontra o quadrado apenas em M.