

Por que flat forward não é interpolar taxa em linha reta?

Introdução

Quando precisamos interpolar uma taxa que está entre dois vértices, a primeira ideia geralmente é fazer uma interpolação linear. Mas, nem sempre isso estará certo.

Por exemplo: se a taxa de 1 ano é 10% ao ano e a taxa de 2 anos é 12% ao ano, parece natural dizer que a taxa de 1,5 ano seria simplesmente

$$\frac{10\% + 12\%}{2} = 11\%.$$

Mas esse raciocínio não representa, por exemplo, uma interpolação *flat forward*. Ele representa apenas uma interpolação linear da taxa.

A ideia do *flat forward* é outra: manter constante a taxa a termo implícita entre dois vértices da curva.

Por isso, a interpolação não deve ser feita diretamente sobre as taxas, mas sobre os fatores acumulados.

Mecânica correta

Considere dois vértices da curva:

$$(t_1, R_1) \quad \text{e} \quad (t_2, R_2),$$

em que t_1 e t_2 são prazos em dias úteis, e R_1 e R_2 são taxas anuais, considerando base 252.

O primeiro passo é transformar as taxas em fatores acumulados:

$$F_1 = (1 + R_1)^{t_1/252},$$

$$F_2 = (1 + R_2)^{t_2/252}.$$

Agora, suponha que queremos encontrar a taxa em um prazo intermediário t , com

$$t_1 < t < t_2.$$

Definimos

$$\alpha = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Na interpolação *flat forward*, o fator no prazo t é dado por

$$F(t) = F_1 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^\alpha.$$

Ou seja,

$$F(t) = F_1 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Depois de encontrar o fator, voltamos para a taxa anual equivalente:

$$R(t) = F(t)^{252/t} - 1.$$

Esse é o ponto principal: primeiro encontramos o fator coerente com a curva; depois convertemos esse fator para taxa.

O erro comum

O erro comum é fazer a interpolação diretamente na taxa:

$$R_{\text{linear}}(t) = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2.$$

Esse cálculo parece razoável, mas ele não preserva a taxa forward implícita entre os dois vértices.

O motivo é simples: taxa e fator não se relacionam de forma linear.

A relação correta é

$$F(t) = (1 + R(t))^{t/252}.$$

Portanto, quando interpolamos a taxa diretamente, estamos ignorando a capitalização embutida no prazo.

No *flat forward*, o que fica constante entre dois vértices não é a taxa anual interpolada. O que fica constante é a taxa a termo daquele intervalo.

Exemplo numérico

Considere a seguinte curva:

$$R_1 = 10\% \quad \text{em} \quad t_1 = 252 \text{ dias úteis},$$

$$R_2 = 12\% \quad \text{em} \quad t_2 = 504 \text{ dias úteis}.$$

Queremos encontrar a taxa para

$$t = 378 \text{ dias úteis}.$$

Como 378 está exatamente no meio entre 252 e 504, temos

$$\alpha = \frac{378 - 252}{504 - 252} = \frac{126}{252} = \frac{1}{2}.$$

Agora calculamos os fatores dos dois vértices:

$$F_1 = (1 + 0, 10)^{252/252} = 1, 10,$$

$$F_2 = (1 + 0, 12)^{504/252} = (1, 12)^2 = 1, 2544.$$

Pelo método *flat forward*, temos

$$F(378) = 1, 10 \left(\frac{1, 2544}{1, 10} \right)^{1/2}.$$

Logo,

$$F(378) \approx 1, 1746659.$$

Agora convertamos esse fator para uma taxa anual equivalente:

$$R(378) = F(378)^{252/378} - 1.$$

$$R(378) \approx 1, 1746659^{2/3} - 1 \approx 0, 113293.$$

Ou seja,

$$R(378) \approx 11, 33\% \text{ ao ano}.$$

Comparação com a interpolação linear

Se tivéssemos feito apenas a média das taxas, o resultado seria

$$R_{\text{linear}} = \frac{10\% + 12\%}{2} = 11\%.$$

Mas, pelo método *flat forward*, encontramos

$$R_{\text{flat forward}} \approx 11,33\%.$$

A diferença é de aproximadamente

$$11,33\% - 11,00\% = 0,33\%.$$

Ou seja, cerca de 33 bps.

Em muitos casos, essa diferença pode parecer pequena. Mas, em instrumentos financeiros, principalmente quando há prazos maiores ou valores relevantes, ela pode impactar diretamente:

- preço unitário;
- marcação a mercado;
- duration;
- DV01;
- resultado da carteira;
- precificação de swaps, títulos públicos, debêntures e outros ativos de renda fixa.

Resumo prático

- *Flat forward* não é interpolar a taxa em linha reta.
- A interpolação correta é feita pelos fatores acumulados.
- O método preserva a taxa forward implícita entre dois vértices.
- A fórmula do fator intermediário é

$$F(t) = F_1 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

- Depois disso, o fator é convertido novamente para taxa:

$$R(t) = F(t)^{252/t} - 1.$$

- A diferença para a interpolação linear pode parecer pequena, mas pode ser relevante na prática.

Conclusão

A intuição de tirar uma média das taxas é simples, mas não respeita a lógica da capitalização.

Uma curva de juros não é apenas uma sequência de taxas. Ela carrega uma estrutura de fatores e taxas implícitas entre os prazos.

Por isso, no *flat forward*, a pergunta correta não é:

“qual é a taxa no meio?”

A pergunta correta é:

“qual é o fator que preserva a taxa forward constante entre os vértices?”

Essa mudança de interpretação é pequena na forma, mas muito importante na prática.