**Exemplo** — conciclicidade via razão cruzada

Verifique se os pontos $A = 1$, $B = -1$, $C = i$ e $D = -i$ são concíclicos.

**Resolução.** Calculamos a razão cruzada:

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} = \frac{(1-i)(-1+i)}{(1+i)(-1-i)}.$$

Como

$$(1-i)(-1+i) = 2i \quad \text{e} \quad (1+i)(-1-i) = -2i,$$

o quociente vale

$$\frac{2i}{-2i} = -1 \in \mathbb{R}.$$

Logo $A$, $B$, $C$ e $D$ são concíclicos. Neste caso, a circunferência é o próprio círculo unitário.

**Você Sabia?** — O triângulo russo

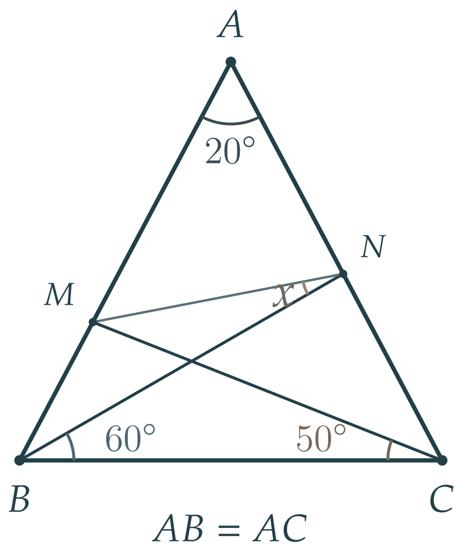
Em 1922, Edward Mann Langley propôs na *Mathematical Gazette* um problema de aparência singela: num triângulo isósceles com ângulo no vértice de $20°$, traçam-se duas cevianas cujos ângulos com a base são dados; pede-se o ângulo que elas formam num dos pontos de interseção. A questão revelou-se tão resistente a abordagens elementares que rapidamente ganhou o apelido de *the world's hardest easy geometry problem*. No Brasil, o problema circula sob o nome de **triângulo russo**, por ter aparecido recorrentemente em olimpíadas soviéticas e, depois, em listas preparatórias para ITA e IME. Até hoje são conhecidas mais de cem soluções distintas: por trigonometria, geometria sintética, coordenadas e números complexos. A seguir apresentamos esta última.

**Exemplo** — Ângulos adventícios — o triângulo russo de Langley

No triângulo isósceles $ABC$ com $AB = AC$, $\angle ABC = \angle ACB = 80°$ e $\angle BAC = 20°$, tomam-se $N$ sobre $AC$ e $M$ sobre $AB$ tais que

$$\angle ABN = 20° \qquad \text{e} \qquad \angle ACM = 30°.$$

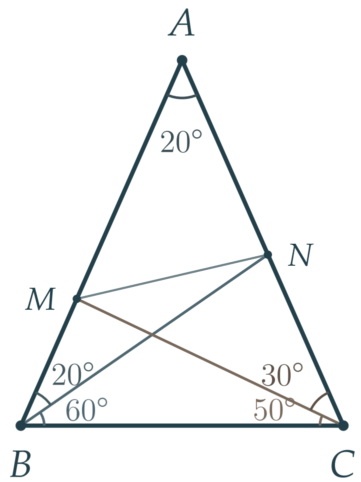
Determine $\angle BNM$.




**Resolução.** Como $AB = AC$, os ângulos da base medem $80°$. Portanto

$$\angle ABN = 20°, \qquad \angle ACM = 30°.$$

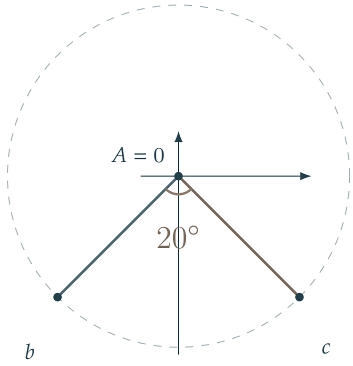
Além disso, $\overrightarrow{BN}$ faz $60°$ com o eixo real positivo e $\overrightarrow{CM}$ faz $130°$ com esse eixo.




Colocamos $A$ na origem e escolhemos $B$ e $C$ no círculo unitário:

$$A = 0, \qquad b = \text{cis}(-100°), \qquad c = \text{cis}(-80°).$$

Então $|b| = |c| = 1$, de modo que $AB = AC$, e a diferença entre os argumentos de $c$ e $b$ é $20°$, como pede o enunciado.




Como $M \in AB$, existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$m = t \operatorname{cis}(-100^\circ).$$

Por outro lado, $M$ também está na reta por $C$ com direção $130^\circ$. Logo existe $u > 0$ tal que

$$m = \operatorname{cis}(-80^\circ) + u \operatorname{cis} 130^\circ.$$

Igualando as duas expressões e multiplicando por $\operatorname{cis} 100^\circ$, obtemos

$$t = \operatorname{cis} 20^\circ + u \operatorname{cis} 230^\circ.$$

Como $t$ é real, a parte imaginária do lado direito deve ser nula. Segue que

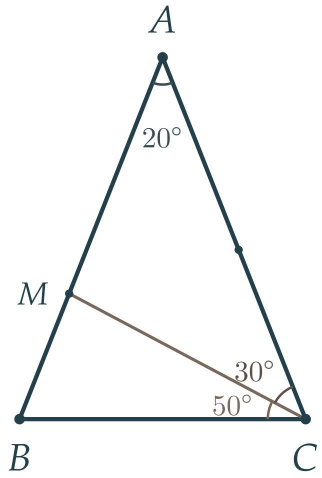
$$u = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ}.$$

Tomando a parte real,

$$t = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{1}{2 \cos 40^\circ}.$$

Portanto

$$m = \frac{\operatorname{cis}(-100^\circ)}{2 \cos 40^\circ}.$$



Fazemos o mesmo com $N$. Como $N \in AC$, existe $s \in (0,1)$ tal que

$$n = s\,\mathrm{cis}(-80^\circ).$$

Como $\overrightarrow{BN}$ tem direção $60^\circ$, existe $v > 0$ tal que

$$n = \mathrm{cis}(-100^\circ) + v\,\mathrm{cis}\,60^\circ.$$

Multiplicando a igualdade por $\mathrm{cis}\,80^\circ$, obtemos

$$s = \mathrm{cis}(-20^\circ) + v\,\mathrm{cis}\,140^\circ.$$

Novamente $s$ é real, e a parte imaginária fornece

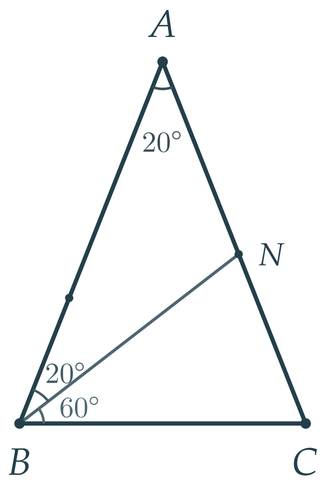
$$v = \frac{\mathrm{sen}\,20^\circ}{\mathrm{sen}\,40^\circ} = \frac{1}{2\cos 20^\circ}.$$

Tomando a parte real,

$$s = \frac{1}{2\cos 20^\circ}.$$

Logo

$$n = \frac{\mathrm{cis}(-80^\circ)}{2\cos 20^\circ}.$$




Agora calculamos as direções dos vetores que partem de $N$. Primeiro,

$$b - n = \mathrm{cis}(-100^\circ) - \frac{\mathrm{cis}(-80^\circ)}{2\cos 20^\circ}.$$

Colocando $\mathrm{cis}(-100^\circ)$ em evidência,

$$b - n = \mathrm{cis}(-100^\circ)\left(1 - \frac{\mathrm{cis}\,20^\circ}{2\cos 20^\circ}\right).$$

Como $2\cos 20^\circ = \operatorname{cis} 20^\circ + \operatorname{cis}(-20^\circ)$, segue que

$$1 - \frac{\operatorname{cis} 20^\circ}{2\cos 20^\circ} = \frac{\operatorname{cis}(-20^\circ)}{2\cos 20^\circ}.$$

Portanto

$$b - n = \frac{\operatorname{cis}(-120^\circ)}{2\cos 20^\circ},$$

e daí

$$\arg(b-n) = -120^\circ.$$

Para o vetor $\overrightarrow{NM}$,

$$m - n = \frac{\operatorname{cis}(-100^\circ)}{2\cos 40^\circ} - \frac{\operatorname{cis}(-80^\circ)}{2\cos 20^\circ}.$$

Colocando $\operatorname{cis}(-100^\circ)$ em evidência,

$$m - n = \operatorname{cis}(-100^\circ)\left(\frac{1}{2\cos 40^\circ} - \frac{\operatorname{cis} 20^\circ}{2\cos 20^\circ}\right).$$

Passando ao mesmo denominador,

$$m - n = \operatorname{cis}(-100^\circ)\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ \operatorname{cis} 20^\circ}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}.$$

No numerador,

$$\cos 20^\circ - \cos 40^\circ \operatorname{cis} 20^\circ = \cos 20^\circ - \cos 40^\circ \cos 20^\circ - i\cos 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{cis}(-50^\circ).$$

Logo

$$m - n = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}\operatorname{cis}(-150^\circ),$$

e, portanto,

$$\arg(m-n) = -150^\circ.$$

Assim,

$$\arg\left(\frac{m-n}{b-n}\right) = (-150^\circ) - (-120^\circ) = -30^\circ.$$

Esse é o ângulo orientado de $\overrightarrow{NB}$ para $\overrightarrow{NM}$. O ângulo interno pedido no problema é, portanto,

$$\angle BNM = 30^\circ.$$

Convém manter cinco cuidados ao longo das soluções: $\operatorname{Im}(z) = 0$ significa que $z$ é real, não que $z = 0$; $\arg(\cdot)$ fornece ângulo orientado; fórmulas de reflexão como $z \mapsto e^{i2\phi}\overline{z}$ valem para retas pela origem e exigem translação no caso geral; em produtos conjugados, todos os fatores devem ser conjugados; e $\overline{a} = \frac{1}{a}$ só vale no círculo unitário. Os exercícios a seguir levam esse vocabulário a problemas mais longos.

## 6.9 Exercícios

### Figuras básicas e distâncias

**Exercício 1.** *(Alturas do triângulo)*

Sabendo que $\overline{BR} = 12$ cm, $\overline{BP} = 9$ cm e $\overline{AQ} = 4$ cm, e que a medida em cm de $\overline{RQ}$ é uma fração $\dfrac{u}{v}$ (com $u, v$ primos entre si), determine $u + v$.

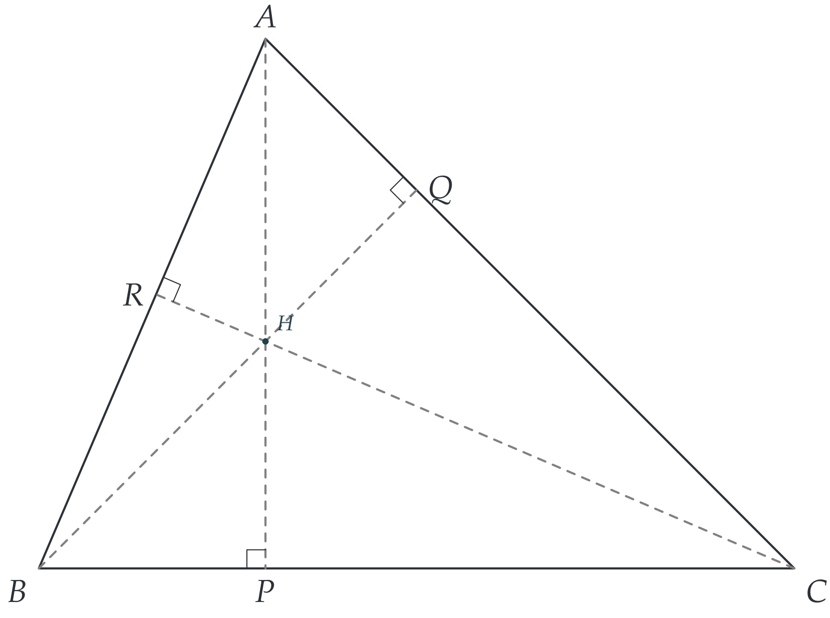
(A) 10

(B) 13

(C) 15

(D) 19

(E) 21




**Resolução.**

Coloque $B = 0$, $BC \subset \mathbb{R}$, $C = c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $A = 9 + iy$, $y > 0$, pois $P$ é o pé da altura de $A$ em $BC$ e $BP = 9$. Defina $k = |A| = \sqrt{81 + y^2}$.