

NÚMEROS COMPLEXOS

Fundamentos, Métodos e Aplicações

Amostra — nove trechos do livro completo

Wallace Santo

O triângulo russo é só o começo.

Esta amostra reúne nove trechos de capítulos diferentes — álgebra, técnicas de olimpíada, geometria e análise de extremos. O livro completo tem dez capítulos.

1

Fundamentos Algébricos

Exemplo — Análise de Extremos de Módulo

Seja a um número real positivo e defina o conjunto $M_a = \{z \in \mathbb{C}^* : |z + \frac{1}{z}| = a\}$. Determine os valores mínimo e máximo de $|z|$ quando $z \in M_a$.

Resolução. Elevando ao quadrado e usando $|w|^2 = w\bar{w}$, obtemos:

$$a^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right) \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$a^2 = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}}$$

Lembrando da relação fundamental $z\bar{z} = |z|^2$, substituímos nos extremos da soma:

$$a^2 = |z|^2 + \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} \implies a^2 = \frac{|z|^4 + (z^2 + \bar{z}^2) + 1}{|z|^2}$$

O termo $z^2 + \bar{z}^2$ pode ser reescrito se utilizarmos o produto notável $(z + \bar{z})^2 = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2$. Isolando a soma dos quadrados, temos $z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2$.

Substituindo isso de volta no nosso numerador e reorganizando os termos de $|z|$:

$$a^2 = \frac{|z|^4 - 2|z|^2 + 1 + (z + \bar{z})^2}{|z|^2}$$

Note que os três primeiros termos formam um produto notável: $(|z|^2 - 1)^2$. Com isso:

$$a^2 = \frac{(|z|^2 - 1)^2 + (z + \bar{z})^2}{|z|^2} = \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|}\right)^2 + \frac{(z + \bar{z})^2}{|z|^2}$$

Sabemos também que $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$, o que indica que $(z + \bar{z})^2$ é sempre um número real não-negativo (pois é o quadrado de um número real). Se ignorarmos (ou seja, removermos) essa parcela positiva do lado direito, o resultado naturalmente diminuirá ou se manterá. Isso estabelece a seguinte desigualdade:

$$a^2 \geq \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|}\right)^2$$

Como $a > 0$, extraíndo a raiz quadrada ($\sqrt{x^2} = |x|$):

$$a \geq \left|\frac{|z|^2 - 1}{|z|}\right| \implies \left| |z| - \frac{1}{|z|} \right| \leq a$$

Equivalentemente:

$$-a \leq |z| - \frac{1}{|z|} \leq a$$

Como $|z| > 0$, multiplicando por $|z|$:

$$-a|z| \leq |z|^2 - 1 \leq a|z|$$

Isso nos leva a um sistema com duas inequações quadráticas reais em função da variável $|z|$:

$$\begin{cases} |z|^2 - a|z| - 1 \leq 0 & \text{(I)} \\ |z|^2 + a|z| - 1 \geq 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

As raízes da equação associada a (I) são $\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. A parábola correspondente tem concavidade para cima, logo, para que seja menor ou igual a zero, $|z|$ deve estar entre as raízes. Uma vez que $|z| > 0$ sempre:

$$|z| \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

As raízes da equação associada a (II) são $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. Para ser maior ou igual a zero, $|z|$ deve estar fora do intervalo entre as raízes. Como a raiz menor é negativa e $|z| > 0$,

ficamos com a restrição impondo apenas a raiz maior:

$$|z| \geq \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Combinando essas duas desigualdades, obtemos os limitantes restritivos para o módulo de z :

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \leq |z| \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Os extremos são atingidos. Igualdade ocorre quando $(z + \bar{z})^2 = 0$, i.e., $\operatorname{Re}(z) = 0$:

$$(z + \bar{z})^2 = 0 \implies z + \bar{z} = 0 \implies \operatorname{Re}(z) = 0$$

Logo z é imaginário puro ($z = yi$, $y \in \mathbb{R}$). Verificando: com $z = yi$,

$$\left| yi + \frac{1}{yi} \right| = a \implies \left| yi - \frac{i}{y} \right| = a \implies \left| i \left(y - \frac{1}{y} \right) \right| = a \implies \left| y - \frac{1}{y} \right| = a$$

Isso gera explicitamente as equações $y^2 - ay - 1 = 0$ e $y^2 + ay - 1 = 0$. As raízes $|y|$ (que representam $|z|$) são reais e idênticas aos limitantes que deduzimos. Como as soluções de y existem, confirmamos que, de fato, os extremos são máximos e mínimos absolutos.

$$\text{Mínimo: } |z| = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \text{Máximo: } |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Exemplo — Extremos Geométricos e a Desigualdade Triangular

Sabendo que $|z - 3 - 4i| = 2$, determine os valores máximo e mínimo que $|z|$ pode assumir.

Resolução Analítica. Podemos resolver este problema de forma direta utilizando a Desigualdade Triangular. Para encontrar o valor máximo, reescrevemos $|z|$ estrategicamente fazendo aparecer o termo do qual conhecemos o módulo:

$$|z| = |(z - 3 - 4i) + (3 + 4i)|$$

Aplicando a Desigualdade Triangular:

$$|z| \leq |z - 3 - 4i| + |3 + 4i|$$

$$|z| \leq 2 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 2 + 5 = 7$$

Para o valor mínimo, utilizamos a forma completa da desigualdade, $||z_1| - |z_2|| \leq$

$|z_1 - z_2|$:

$$\begin{aligned} |z - (3 + 4i)| &\geq ||z| - |3 + 4i|| \\ &2 \geq ||z| - 5| \end{aligned}$$

Isso nos leva à inequação simultânea $-2 \leq |z| - 5 \leq 2$. Somando 5 em todos os membros:

$$3 \leq |z| \leq 7$$

Portanto, o valor mínimo do módulo de z é 3 e o valor máximo é 7.

Resolução Geométrica. Procedemos por argumentação geométrica direta.

A equação $|z - (3 + 4i)| = 2$ representa o lugar geométrico de todos os pontos z do plano cuja distância até o centro $z_c = 3 + 4i$ é igual a 2 unidades. Ou seja, descreve uma **circunferência** de centro $(3, 4)$ e raio $R = 2$.

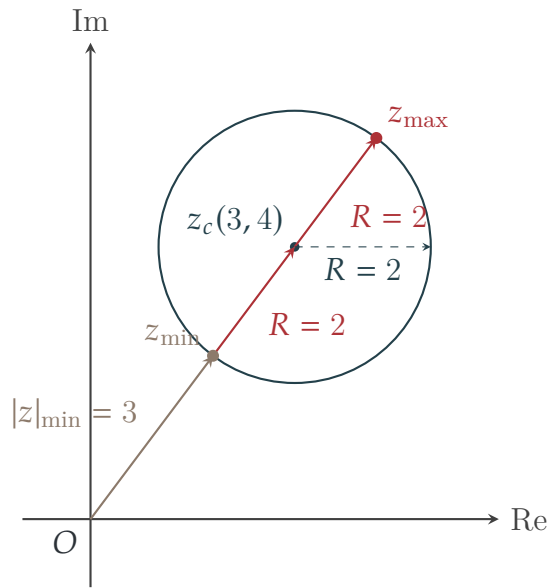
A grandeza $|z|$ que desejamos maximizar e minimizar representa, por definição, a distância geométrica da origem $O(0, 0)$ até um ponto z pertencente a essa circunferência. Queremos descobrir, portanto, quais pontos da circunferência estão mais próximos e mais afastados da origem.

A distância absoluta da origem ao centro da circunferência é:

$$d = |z_c - 0| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Geometricamente, a menor e a maior distância de um ponto fixo externo (a origem) até uma região circular sempre acontecem **sobre a reta que interliga esse ponto ao centro da circunferência**.

- **Distância Mínima:** Acontece quando o ponto z está na borda “interna” da circunferência (o mais de frente para a origem). O comprimento total é a distância até o centro subtraída do raio da circunferência: $|z|_{\min} = d - R = 5 - 2 = 3$.
- **Distância Máxima:** Acontece quando o ponto z habita a borda “externa” (diametralmente oposta, nas costas do centro). O comprimento é a distância até o centro acrescida do raio da circunferência: $|z|_{\max} = d + R = 5 + 2 = 7$.



Exercício 1. (*O Perigo do Limite Superior*)

Considere os números complexos tais que $|z| = 1$. Determine o valor máximo da expressão $|z^2 + z - 1|$.

Resolução.

A desigualdade triangular aplicada diretamente dá $|z^2 + z - 1| \leq 3$, mas esse limitante não é atingido:

$$|z^2 + z - 1| \leq |z^2| + |z| + |-1| = |z|^2 + |z| + 1.$$

Como $|z| = 1$, obteríamos $1 + 1 + 1 = 3$. No entanto, para que o valor 3 seja atingido, os vetores z^2 , z e -1 precisariam apontar exatamente para a mesma direção no plano de Argand-Gauss. Como -1 aponta para o eixo real negativo, precisaríamos que z também fosse um real negativo. Com a restrição $|z| = 1$, a única opção seria $z = -1$. Mas, se $z = -1$, então $z^2 = 1$, anulando a soma máxima. Portanto 3 é apenas uma cota superior, não o máximo.

Para encontrar o máximo, consideremos $f(z) = |z^2 + z - 1|^2$. Substituímos $1 = z\bar{z}$, pois $|z| = 1$:

$$f(z) = |z^2 + z - z\bar{z}|^2 = |z(z + 1 - \bar{z})|^2.$$

Pela propriedade multiplicativa dos módulos ($|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$):

$$f(z) = |z|^2 \cdot |z + 1 - \bar{z}|^2 = 1 \cdot |(x + yi) + 1 - (x - yi)|^2.$$

Cancelando x :

$$f(z) = |1 + 2yi|^2.$$

Calculando o módulo dessa nova expressão:

$$f(z) = 1^2 + (2y)^2 = 1 + 4y^2.$$

Como z está na circunferência unitária, temos $x^2 + y^2 = 1$, o que impõe a restrição de que y^2 pode ser, no máximo, igual a 1 (o que ocorre quando $x = 0$, ou seja, $z = \pm i$). Substituindo o valor máximo possível de y^2 :

$$f(z) \leq 1 + 4(1) = 5.$$

Como calculamos o módulo ao quadrado, o valor máximo da expressão original é $\sqrt{5}$; em particular, $\sqrt{5} < 3$.

Máximo: $\sqrt{5}$.

■

2

Forma Trigonométrica e Raízes da Unidade

2.0.1 Filtro de Raízes da Unidade

Uma das aplicações mais frequentes das raízes da unidade em **olimpíadas e concursos militares** é o **filtro de raízes da unidade** (também conhecido como *Root of Unity Filter* ou RUFF).

O filtro serve para isolar coeficientes cujos índices satisfazem uma congruência fixa, como os pares ou os múltiplos de 3. Em vez de separar esses termos diretamente, usamos combinações lineares das raízes da unidade para anular os coeficientes indesejados e preservar apenas os que obedecem à condição modular.

O cancelamento seletivo

Toda a técnica se baseia em uma única propriedade geométrica das raízes da unidade.

Propriedade 2.1. *Identidade de cancelamento*

Seja $\omega = \text{cis } \frac{2\pi}{n}$ uma raiz n -ésima primitiva da unidade. Para todo inteiro k :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \mid k, \\ 0, & \text{se } n \nmid k. \end{cases}$$

Geometricamente, cada termo ω^{jk} é um vetor no círculo unitário: quando $n \mid k$, todos coincidem; quando $n \nmid k$, distribuem-se simetricamente e se cancelam.

Demonstração. Lembre que $\omega^n = 1$.

Se $n \mid k$, existe m com $k = mn$, logo $\omega^k = (\omega^n)^m = 1$, e todos os termos valem 1:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = n \implies \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = 1.$$

Se $n \nmid k$, então $\omega^k \neq 1$ e a soma é uma P.G. de razão $\omega^k \neq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \frac{(\omega^k)^n - 1}{\omega^k - 1} = \frac{\omega^{kn} - 1}{\omega^k - 1} = \frac{1 - 1}{\omega^k - 1} = 0.$$

Assim, a média vale 1 se $n \mid k$ e 0 caso contrário. ■

O filtro aplicado a polinômios

Dada uma função geradora $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, queremos extrair os coeficientes cujos expoentes deixam **resto** r na divisão por n .

Teorema — Filtro de raízes da unidade

Teorema 2.1. Seja $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ e $\omega = \text{cis } \frac{2\pi}{n}$. A soma dos coeficientes a_k cujo índice deixa resto r na divisão por n é:

$$a_r + a_{r+n} + a_{r+2n} + \dots = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jr} P(\omega^j)$$

Demonstração. O termo com coeficiente a_k em $\omega^{-jr} P(\omega^j)$ contribui com $a_k \omega^{j(k-r)}$. Somando em j :

$$a_k \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-r)} \right) = \begin{cases} a_k, & k \equiv r \pmod{n}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a soma total seleciona exatamente os a_k com $k \equiv r$. ■

Como ler essa fórmula:

1. $P(\omega^j)$: Jogamos as raízes da unidade dentro do polinômio. Isso faz cada coeficiente a_k ser multiplicado por um vetor giratório ω^{jk} .
2. ω^{-jr} (**fator de deslocamento**): Esse fator ajusta o giro na quantidade do resto r que queremos, alinhando os vetores de interesse de volta ao eixo real.
3. $\frac{1}{n} \sum$ (**a média**): Os termos com resto escolhido permanecem com peso 1, e os demais

se cancelam.

O caso mais famoso ($r = 0$): Se queremos os múltiplos de n , o fator de deslocamento vira 1 e a fórmula simplifica:

$$a_0 + a_n + a_{2n} + \dots = \frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) + \dots + P(\omega^{n-1})}{n}.$$

Exemplo — Aquecimento: soma de binomiais pares ($n = 2$)

Calcule $\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots$

Queremos separar, na expansão binomial, os termos de índice par dos de índice ímpar. As raízes quadradas da unidade fazem essa separação porque $1^k = 1$ para todo k , enquanto $(-1)^k$ vale $+1$ para k par e -1 para k ímpar.

Identificamos o polinômio gerador.

O Binômio de Newton diz: $(1 + x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k$.

Chamamos $P(x) = (1 + x)^m$. Os coeficientes de P são exatamente os $\binom{m}{k}$ que queremos somar.

Escolhemos a ordem do filtro.

Queremos separar pares de ímpares, ou seja, classificar os expoentes por resto na divisão por $n = 2$. As raízes 2-ésimas da unidade são $\omega_0 = 1$ e $\omega_1 = -1$.

Calculamos P nas raízes.

- $P(1) = (1 + 1)^m = 2^m$. Aqui todos os $\binom{m}{k}$ entram com sinal $+1$:

$$P(1) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots$$

- $P(-1) = (1 - 1)^m = 0^m = 0$. Aqui os pares entram com $(-1)^k = +1$ e os ímpares com $(-1)^k = -1$:

$$P(-1) = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots$$

Por fim, tomamos a média.

Somando as duas expressões acima, os termos ímpares se cancelam e os pares dobram:

$$\begin{aligned} P(1) + P(-1) &= 2\binom{m}{0} + 0 \cdot \binom{m}{1} + 2\binom{m}{2} + 0 \cdot \binom{m}{3} + \dots \\ &= 2\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots\right]. \end{aligned}$$

Dividindo por 2:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{2^m + 0}{2} = 2^{m-1}.$$

💡 Aqui avaliamos o polinômio em 1 e -1 para separar a paridade. Para múltiplos de 3 ou 4, o procedimento é análogo, usando mais raízes da unidade.

Exemplo — Filtro cúbico de binomiais

Encontre uma fórmula fechada para:

$$S = \binom{m}{0} + \binom{m}{3} + \binom{m}{6} + \dots$$

Uso de raízes cúbicas.

No exemplo anterior, as raízes ± 1 separavam a paridade porque $(\pm 1)^k$ alterna de sinal. Para múltiplos de 3, usamos as raízes cúbicas da unidade $\{1, \omega, \omega^2\}$, com $\omega = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$, pois $\omega^{3k} = 1$ e $1 + \omega^j + \omega^{2j} = 0$ quando $3 \nmid j$.

1. $\omega^3 = 1$ (por definição de raiz cúbica da unidade).

2. $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Justificativa. As três raízes cúbicas são raízes de $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$. Para $\omega \neq 1$, temos $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, ou seja, $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

3. **Substituição-chave:** $1 + \omega = -\omega^2$.

Justificativa. Da identidade acima: $1 + \omega = -\omega^2$ (basta isolar ω^2). Igualmente, $1 + \omega^2 = -\omega$.

$$S = \frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2)}{3}.$$

• $P(1) = (1 + 1)^m = 2^m$.

• $P(\omega) = (1 + \omega)^m$. Usando a substituição-chave anterior:

$$P(\omega) = (-\omega^2)^m = (-1)^m \cdot (\omega^2)^m = (-1)^m \omega^{2m}.$$

• $P(\omega^2) = (1 + \omega^2)^m$. Usando $1 + \omega^2 = -\omega$:

$$P(\omega^2) = (-\omega)^m = (-1)^m \omega^m.$$

$$S = \frac{2^m + (-1)^m \omega^{2m} + (-1)^m \omega^m}{3} = \frac{2^m + (-1)^m (\omega^m + \omega^{2m})}{3}.$$

Note que $\omega^2 = \text{cis } \frac{4\pi}{3} = \text{cis } \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \bar{\omega}$ (complexo conjugado de ω , pois têm mesmo módulo e argumento oposto). Portanto:

$$\omega^{2m} = (\omega^2)^m = \bar{\omega}^m = \overline{\omega^m}.$$

Assim ω^m e ω^{2m} são conjugados entre si! A soma de um número complexo com seu conjugado é sempre o dobro da parte real:

$$\omega^m + \omega^{2m} = \omega^m + \overline{\omega^m} = 2 \operatorname{Re}(\omega^m).$$

Por Moivre, $\omega^m = \text{cis } \frac{2m\pi}{3}$, logo:

$$\omega^m + \omega^{2m} = 2 \cos\left(\frac{2m\pi}{3}\right).$$

Resultado final:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \binom{m}{3k} = \frac{2^m + (-1)^m \cdot 2 \cos\left(\frac{2m\pi}{3}\right)}{3}.$$

3

Aplicações Avançadas

3.0 Seção 3.1 — Produtos, Fatorações e Telescopiação

Exercício 1. (*Produto de cossenos por telescopiação complexa*)

Calcular $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

Resolução.

Defina $z = \text{cis } 20^\circ$. Então:

$$\begin{cases} z + \frac{1}{z} = 2 \cos 20^\circ \\ z^2 + \frac{1}{z^2} = 2 \cos 40^\circ \\ z^4 + \frac{1}{z^4} = 2 \cos 80^\circ \end{cases}$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned} 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) \\ &= \frac{z^2 + 1}{z} \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2} \cdot \frac{z^8 + 1}{z^4} \\ &= \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{z^7}. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por $(z^2 - 1)$ para forçar telescópio:

$$\begin{aligned} \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{z^7} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1} &= \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{z^7(z^2 - 1)} \\ &= \frac{(z^4 - 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{z^7(z^2 - 1)} \\ &= \frac{(z^8 - 1)(z^8 + 1)}{z^7(z^2 - 1)} \\ &= \frac{z^{16} - 1}{z^7(z^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Como $z = \text{cis } 20^\circ$, temos $z^9 = \text{cis } 180^\circ = -1$. Duas consequências:

- **Numerador:** $z^{16} = z^9 \cdot z^7 = (-1) \cdot z^7 = -z^7$, logo $z^{16} - 1 = -z^7 - 1 = -(z^7 + 1)$.
- **Denominador:** $z^7(z^2 - 1) = z^9 - z^7 = -1 - z^7 = -(1 + z^7)$.

Portanto:

$$\frac{z^{16} - 1}{z^7(z^2 - 1)} = \frac{-(z^7 + 1)}{-(z^7 + 1)} = 1$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

■

_____ ◇ _____

3.0 Seção 3.3 — Parametrização Trigonométrica, Argumento e Arctangente

Exercício 2. (*Sistema simétrico e passagem ao arco duplo*)

Se $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ e $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, mostrar que $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ e $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

Resolução.

Defina $z_1 = \text{cis } x$, $z_2 = \text{cis } y$, $z_3 = \text{cis } z$.

Do enunciado: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Queremos mostrar que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ (por Moivre, arco duplo).

Usando a identidade:

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \\ &= 0 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \end{aligned}$$

Fatorando:

$$= -2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right)$$

Como $|z_i| = 1$: $\frac{1}{z_i} = \bar{z}_i$

$$\begin{aligned} &= -2z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1z_2z_3 \cdot \overline{(z_1 + z_2 + z_3)} \\ &= -2z_1z_2z_3 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, que implica:

$$\begin{aligned} \text{sen } 2x + \text{sen } 2y + \text{sen } 2z &= 0 \\ \text{cos } 2x + \text{cos } 2y + \text{cos } 2z &= 0 \end{aligned}$$

■

◇

3.0 Seção 3.7 — Arcos Notáveis, Produtos e Somatórios

Exercício 3. (Expressão em $\pi/10$ via $z^{10} = -1$)

Calcule

$$E = 4 \cos \frac{\pi}{10} - 3 \sec \frac{\pi}{10} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}.$$

Resolução.

Ponha

$$a = \frac{\pi}{10} \quad \text{e} \quad z = e^{ia}.$$

Então, pela fórmula de Euler, $z = \cos a + i \operatorname{sen} a$ e, em particular,

$$z^{10} = e^{i10a} = e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad z^{10} + 1 = 0,$$

e também

$$z^5 = e^{i5a} = e^{i\pi/2} = i.$$

Considere a expressão

$$E = 4 \cos a - 3 \operatorname{sec} a - 2 \operatorname{tg} a.$$

Como $a = \pi/10$, temos $\cos a \neq 0$. Logo, podemos multiplicar a igualdade por $\cos a$ sem problemas. Usando $\operatorname{sec} a = \frac{1}{\cos a}$ e $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, obtemos:

$$E \cos a = 4 \cos^2 a - 3 - 2 \operatorname{sen} a. \quad (1)$$

Como $z = e^{ia}$, temos também $z^{-1} = e^{-ia}$. Somando e subtraindo:

$$\cos a = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \operatorname{sen} a = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Substituindo essas expressões em (1):

$$E \cos a = 4 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 - 3 - 2 \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right).$$

Primeiro,

$$4 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2 = (z + z^{-1})^2 = z^2 + 2 + z^{-2}.$$

Logo, (1) vira

$$E \cos a = (z^2 + 2 + z^{-2}) - 3 - \frac{z - z^{-1}}{i} = z^2 - 1 + z^{-2} - \frac{z - z^{-1}}{i}.$$

Como $\frac{1}{i} = -i$, então

$$-\frac{z - z^{-1}}{i} = i(z - z^{-1}) = iz - iz^{-1}.$$

Assim,

$$E \cos a = z^2 - 1 + z^{-2} + iz - iz^{-1}. \quad (2)$$

Da relação $z^5 = i$, substituindo em (2):

$$E \cos a = z^2 - 1 + z^{-2} + z^5 z - z^5 z^{-1} = z^2 - 1 + z^{-2} + z^6 - z^4.$$

Colocamos tudo sobre o mesmo denominador z^2 :

$$E \cos a = \frac{z^4 - z^2 + 1 + z^8 - z^6}{z^2} = \frac{z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1}{z^2}. \quad (3)$$

De $z^{10} + 1 = 0$, a identidade algébrica fornece:

$$z^{10} + 1 = (z^2 + 1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1).$$

Como $z^{10} + 1 = 0$:

$$(z^2 + 1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1) = 0. \quad (4)$$

Se fosse $z^2 + 1 = 0$, então $z^2 = -1 = e^{i\pi}$. Mas $z^2 = e^{i2a} = e^{i\pi/5}$, e $\pi/5$ não é congruente a π (módulo 2π). Logo $z^2 + 1 \neq 0$, e pela igualdade (4):

$$z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0. \quad (5)$$

Da expressão (3) e pelo (5), o numerador é 0. Como $z \neq 0$:

$$E \cos a = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0.$$

$E = 0$. ■

6

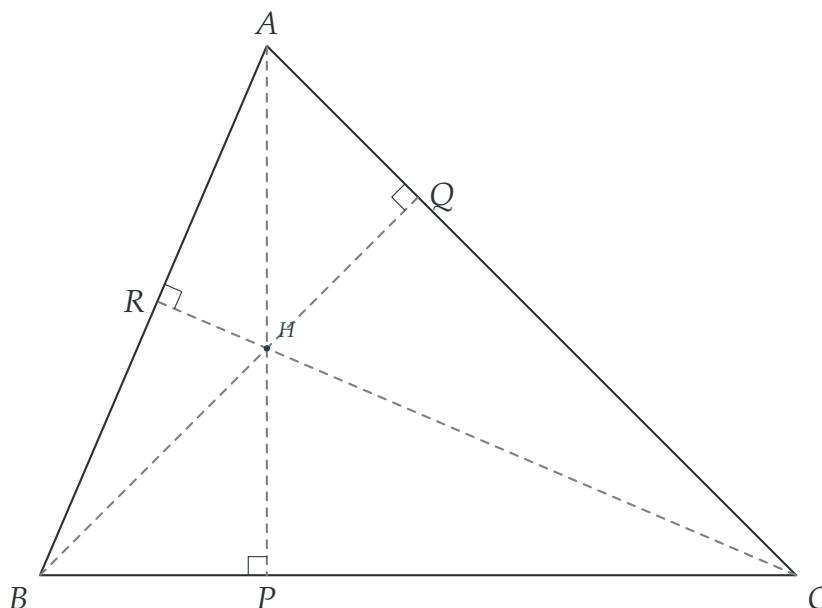
Geometria Complexa

6.0 Seção 6.6 — Exercícios

Exercício 1. (*Alturas do triângulo*)

Sabendo que $\overline{BR} = 12$ cm, $\overline{BP} = 9$ cm e $\overline{AQ} = 4$ cm, e que a medida em cm de \overline{RQ} é uma fração $\frac{u}{v}$ (com u, v primos entre si), determine $u + v$.

- (A) 10
- (B) 13
- (C) 15
- (D) 19
- (E) 21



Resolução.

Coloque $B = 0, BC \subset \mathbb{R}$:

$$B = 0, \quad C = c \in \mathbb{R}_{>0}, \quad A = 9 + iy \quad (y > 0),$$

pois P é o pé da altura de A em BC e $BP = 9 \Rightarrow \operatorname{Re}(A) = 9$. Defina

$$k = |A| = \sqrt{81 + y^2}.$$

(1) Determinação de C via o pé R . Como $R \in AB$ e $BR = 12$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$R = \lambda A, \quad |R| = \lambda |A| = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{k}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{12}{k} A.$$

A condição $CR \perp AB$ equivale a

$$\operatorname{Re}((R - C)\bar{A}) = 0.$$

Como $C = c \in \mathbb{R}$, obtemos $\operatorname{Re}(R\bar{A}) = \operatorname{Re}(c\bar{A})$.

$$R\bar{A} = \frac{12}{k} A\bar{A} = \frac{12}{k} k^2 = 12k, \quad \operatorname{Re}(c\bar{A}) = c \operatorname{Re}(A) = 9c.$$

Logo

$$12k = 9c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{3}k. \tag{I}$$

(2) O pé Q e a condição $BQ \perp AC$. Defina $u = C - A$. Como $Q \in AC$, escreva

$$Q = A + s u, \quad s \in (0, 1).$$

Como $AQ = 4$, segue

$$|Q - A| = |s u| = s|u| = 4 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4}{|u|}. \quad (\text{II})$$

Além disso, $BQ \perp AC$ equivale a $Q \perp u$, isto é,

$$\operatorname{Re}(Q \bar{u}) = 0.$$

Substituindo $Q = A + su$:

$$\operatorname{Re}(A\bar{u}) + s|u|^2 = 0.$$

Com (II), obtemos

$$\operatorname{Re}(A\bar{u}) + 4|u| = 0. \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{Re}(A\bar{u}) = \operatorname{Re}(A(\bar{C} - \bar{A})) = \operatorname{Re}(A\bar{C}) - |A|^2 = c \operatorname{Re}(A) - k^2 = 9c - k^2.$$

Pelo (I), $9c = 12k$, então

$$\operatorname{Re}(A\bar{u}) = 12k - k^2 = -k(k - 12).$$

Em (III):

$$-k(k - 12) + 4|u| = 0 \quad \Rightarrow \quad 4|u| = k(k - 12). \quad (\text{IV})$$

(3) Relação para $|u|^2$.

$$|u|^2 = |C - A|^2 = |C|^2 + |A|^2 - 2 \operatorname{Re}(A\bar{C}).$$

Como $C = c \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(A\bar{C}) = 9c$. Com (I), $9c = 12k$ e $c^2 = \frac{16}{9}k^2$. Logo

$$|u|^2 = \frac{16}{9}k^2 + k^2 - 24k = \frac{k(25k - 216)}{9}. \quad (\text{V})$$

Quadrando (IV) e usando (V):

$$\begin{aligned} 16|u|^2 = k^2(k - 12)^2 &\quad \Rightarrow \quad 16 \cdot \frac{k(25k - 216)}{9} = k^2(k - 12)^2 \\ &\quad \Rightarrow \quad 16(25k - 216) = 9k(k - 12)^2. \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

(4) Cálculo de RQ . De (IV), temos $\frac{4}{|u|} = \frac{16}{k(k-12)}$. Defina $\mu = \frac{16}{k(k-12)}$. Assim,

$$Q = A + \mu(C - A) = (1 - \mu)A + \mu C, \quad R = \frac{12}{k}A.$$

O vetor $R - Q$ vale:

$$R - Q = \left(\frac{12}{k} - (1 - \mu)\right) A - \mu C = \left(\frac{12}{k} - 1 + \mu\right) A - \mu C.$$

Para calcular $|R - Q|^2$, usamos a fórmula $|\alpha A + \beta C|^2 = |\alpha|^2|A|^2 + |\beta|^2|C|^2 + 2 \operatorname{Re}(\alpha \bar{\beta} A \bar{C})$.

Como α e $\beta = -\mu$ são reais:

$$|R - Q|^2 = \left(\frac{12}{k} - 1 + \mu\right)^2 k^2 + \mu^2 \cdot \frac{16}{9} k^2 - 2\mu \left(\frac{12}{k} - 1 + \mu\right) \cdot 12k.$$

Substituindo $\mu = \frac{16}{k(k-12)}$ e simplificando (os termos se organizam utilizando a relação (VI)):

$$|R - Q|^2 = \frac{4096(25k - 216)}{81k(k - 12)^2}.$$

Pela relação (VI):

$$\frac{25k - 216}{k(k - 12)^2} = \frac{9}{16}.$$

Logo,

$$|R - Q|^2 = \frac{4096}{81} \cdot \frac{9}{16} = \frac{256}{9} \Rightarrow RQ = \frac{16}{3}.$$

$$RQ = \frac{16}{3} \Rightarrow (u, v) = (16, 3) \Rightarrow u + v = \mathbf{19}.$$

■

7

Problemas Seletos de Olimpíada

Exercício 1. (Equação de grau dez e módulo unitário (Putnam 1989))

Prove que, se $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, então $|z| = 1$. (Putnam, 1989)

Resolução.

A primeira ideia é isolar uma potência de z :

$$z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i}.$$

Escrevendo $z = a + bi$, obtemos

$$|z|^9 = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right| = \frac{\sqrt{121 + 220b + 100(a^2 + b^2)}}{\sqrt{121(a^2 + b^2) + 220b + 100}}.$$

Comparamos numerador e denominador.

Se $|z| > 1$, então $a^2 + b^2 > 1$, e o denominador é maior do que o numerador. Logo $|z|^9 < 1$, o que contradiz $|z| > 1$.

Se $|z| < 1$, acontece o contrário: o numerador é maior do que o denominador, e então $|z|^9 > 1$, impossível.

Resta apenas

$$|z| = 1.$$

■

O livro completo tem 10 capítulos, 130 questões de concurso e 480 exercícios.
O triângulo russo — e muito mais — esperam por você nas próximas páginas.