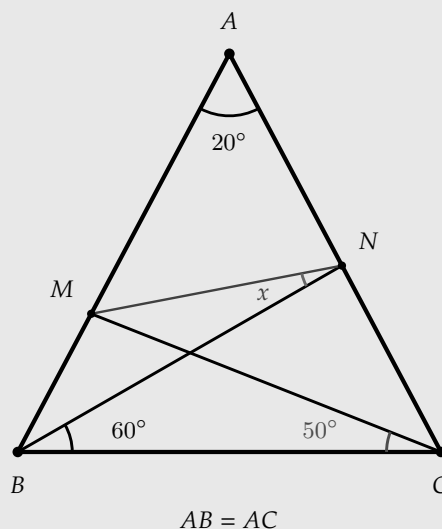


Exemplo 6.83. Ângulos adventícios — o triângulo russo de Langley.

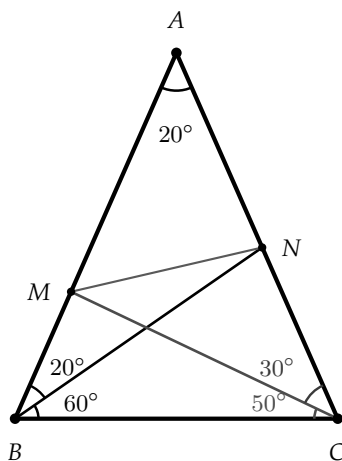
No triângulo isósceles ABC com $AB = AC$, $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$ e $\angle BAC = 20^\circ$, tomam-se N sobre AC e M sobre AB tais que

$$\angle ABN = 20^\circ \quad \text{e} \quad \angle ACM = 30^\circ.$$

Determine $\angle BNM$.



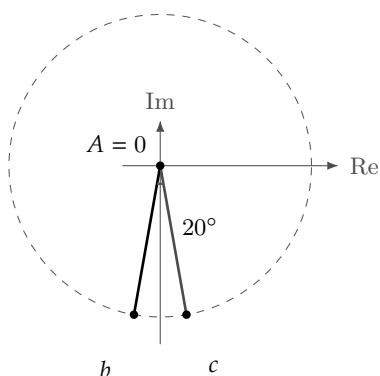
Resolução. Os ângulos restantes na base são $80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ e $80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$. A figura seguinte destaca essa decomposição.



Colocamos A na origem e escolhemos B e C no círculo unitário:

$$A = 0, \quad b = \text{cis}(-100^\circ), \quad c = \text{cis}(-80^\circ).$$

Então $|b| = |c| = 1$, de modo que $AB = AC$, e a diferença entre os argumentos de c e b é 20° , como pede o enunciado. Nessa normalização, $\overrightarrow{BN}$ faz 60° com o eixo real positivo e $\overrightarrow{CM}$ faz 130° com esse eixo.



Como $M \in AB$, existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$m = t \operatorname{cis}(-100^\circ).$$

Por outro lado, M também está na reta por C com direção 130° . Logo existe $u > 0$ tal que

$$m = \operatorname{cis}(-80^\circ) + u \operatorname{cis} 130^\circ.$$

Igualando as duas expressões e multiplicando por $\operatorname{cis} 100^\circ$, obtemos

$$t = \operatorname{cis} 20^\circ + u \operatorname{cis} 230^\circ.$$

Como t é real, a parte imaginária do lado direito deve ser nula. Segue que

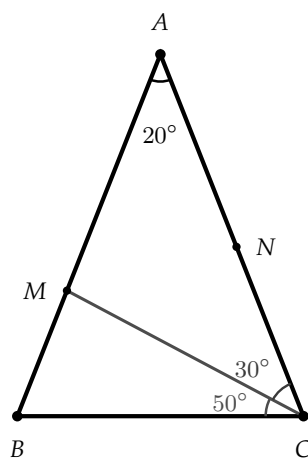
$$u = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ}.$$

Tomando a parte real,

$$t = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{1}{2 \cos 40^\circ}.$$

Portanto

$$m = \frac{\operatorname{cis}(-100^\circ)}{2 \cos 40^\circ}.$$



Fazemos o mesmo com N . Como $N \in AC$, existe $s \in (0, 1)$ tal que

$$n = s \operatorname{cis}(-80^\circ).$$

Como $\overrightarrow{BN}$ tem direção 60° , existe $v > 0$ tal que

$$n = \text{cis}(-100^\circ) + v \text{cis} 60^\circ.$$

Multiplicando a igualdade por $\text{cis} 80^\circ$, obtemos

$$s = \text{cis}(-20^\circ) + v \text{cis} 140^\circ.$$

Novamente s é real, e a parte imaginária fornece

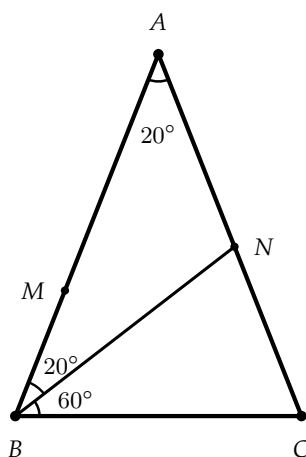
$$v = \frac{\text{sen } 20^\circ}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{1}{2 \cos 20^\circ}.$$

Tomando a parte real,

$$s = \frac{1}{2 \cos 20^\circ}.$$

Logo

$$n = \frac{\text{cis}(-80^\circ)}{2 \cos 20^\circ}.$$



Agora calculamos as direções dos vetores que partem de N . Primeiro,

$$b - n = \text{cis}(-100^\circ) - \frac{\text{cis}(-80^\circ)}{2 \cos 20^\circ}.$$

Colocando $\text{cis}(-100^\circ)$ em evidência,

$$b - n = \text{cis}(-100^\circ) \left(1 - \frac{\text{cis} 20^\circ}{2 \cos 20^\circ} \right).$$

Como $2 \cos 20^\circ = \text{cis} 20^\circ + \text{cis}(-20^\circ)$, segue que

$$1 - \frac{\text{cis} 20^\circ}{2 \cos 20^\circ} = \frac{\text{cis}(-20^\circ)}{2 \cos 20^\circ}.$$

Portanto

$$b - n = \frac{\text{cis}(-120^\circ)}{2 \cos 20^\circ},$$

e daí

$$\text{Arg}(b - n) = -120^\circ.$$

Para o vetor $\overrightarrow{NM}$,

$$m - n = \frac{\text{cis}(-100^\circ)}{2 \cos 40^\circ} - \frac{\text{cis}(-80^\circ)}{2 \cos 20^\circ}.$$

Colocando $\text{cis}(-100^\circ)$ em evidência,

$$m - n = \text{cis}(-100^\circ) \left(\frac{1}{2 \cos 40^\circ} - \frac{\text{cis } 20^\circ}{2 \cos 20^\circ} \right).$$

Passando ao mesmo denominador,

$$m - n = \text{cis}(-100^\circ) \frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ \text{cis } 20^\circ}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ}.$$

No numerador,

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ - \cos 40^\circ \text{cis } 20^\circ &= \cos 20^\circ (1 - \cos 40^\circ) - i \cos 40^\circ \sin 20^\circ \\ &= \sin 20^\circ (\sin 40^\circ - i \cos 40^\circ) \\ &= \sin 20^\circ \text{cis}(-50^\circ). \end{aligned}$$

Logo

$$m - n = \frac{\sin 20^\circ}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ} \text{cis}(-150^\circ),$$

e, portanto,

$$\text{Arg}(m - n) = -150^\circ.$$

Assim,

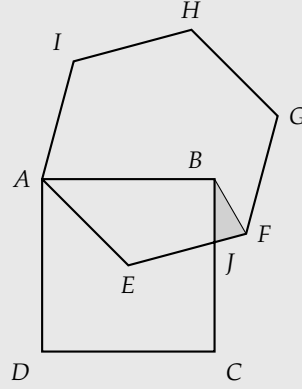
$$\text{Arg}\left(\frac{m - n}{b - n}\right) = (-150^\circ) - (-120^\circ) = -30^\circ.$$

Esse é o ângulo orientado de $\overrightarrow{NB}$ para $\overrightarrow{NM}$. O ângulo interno pedido no problema é, portanto,

$$\angle BNM = 30^\circ.$$

Exemplo 6.56. *Quadrado e hexágono com um vértice no centro.*

(Colégio Naval 2025) Um quadrado $ABCD$ de lado 4 tem centro E . Constrói-se o hexágono regular $AEFGHI$ com o vértice F exterior ao quadrado, do lado de BC , como na figura. Seja $J = EF \cap BC$. Determine $[BJF]$.



Resolução. Tome $a = 0, b = 4, c = 4 - 4i, d = -4i$, de modo que $e = 2 - 2i$. Os lados sucessivos do hexágono giram 60° no sentido anti-horário na orientação indicada. Para $\rho = \text{cis } \frac{\pi}{3}$,

$$f = e + \rho e = (3 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3)i.$$

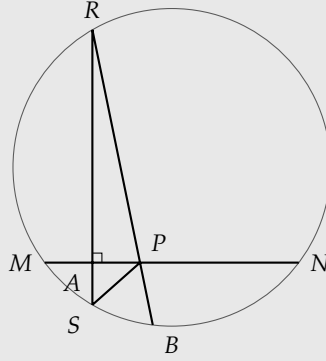
Na reta EF , ponha $j = e + t\rho e$. Como $J \in BC$, sua parte real é 4. Temos $\rho e = (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i$, portanto $t = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$, que pertence a $(0, 1)$. Segue $j = 4 + (2 - 2\sqrt{3})i$, situado entre B e C .

A base vertical BJ mede $2\sqrt{3} - 2$, e a distância de F à sua reta é $\sqrt{3} - 1$. Assim

$$[BJF] = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Exemplo 6.38. Um ângulo constante entre cordas.

(Colégio Naval 2023) Em uma circunferência unitária, P é interior à corda MN , com $PN = 1$. A corda RS é perpendicular a MN em A , ponto médio de MP . A reta RP encontra novamente a circunferência em $B \neq R$. Determine $\angle BPS$.



Resolução. Tome $m = 0, n = \ell$, com $1 < \ell \leq 2$. Então $p = \ell - 1, a = d = \frac{\ell-1}{2} > 0$. O centro tem afixo $o = \frac{\ell}{2} + hi$, com $h^2 = 1 - \frac{\ell^2}{4}$. Na reta perpendicular por A , a abscissa difere da do centro em $-\frac{1}{2}$. Por isso os extremos da corda são

$$r = d + \left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, \quad s = d + \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

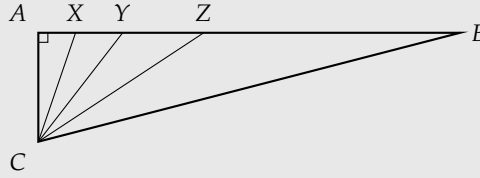
Para calcular o ângulo em P , use o produto conjugado dos vetores:

$$\begin{aligned} \overline{(r-p)}(s-p) &= d^2 + h^2 - \frac{3}{4} + i\sqrt{3}d \\ &= d(-1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Na última passagem substituímos $d = \frac{\ell-1}{2}$ e o valor de h^2 . Como $d > 0$, o argumento é 120° , independentemente da corda escolhida. O ponto P é interior ao disco; portanto as duas interseções R, B de sua secante ficam em semirretas opostas a partir de P . Assim $\angle BPS = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Exemplo 6.69. *Produto alternado de áreas.*

(Colégio Naval 2007, adaptada) No triângulo ABC , retângulo em A , temos $AC = 10$, $BC = 40$. Os pontos X, Y, Z , nessa ordem no lado AB , dividem $\angle ACB$ em quatro ângulos iguais pelas cevianas CX, CY, CZ . Se S_1, S_2, S_3, S_4 são as áreas de CAX, CXY, CYZ, CZB , determine $\frac{S_1 S_3}{S_2 S_4}$.



Resolução. Tome $c = 0, a = L = 10$ real e AB na reta $\operatorname{Re} z = L$. Ponha $\theta = \angle ACB$ e $\alpha = \frac{\theta}{4}$. Como $\cos \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{4}$, todos os cossenos $c_k = \cos(k\alpha), 0 \leq k \leq 4$, são positivos. O ponto da ceviana de direção u^k , com $u = \operatorname{cis} \alpha$, na reta AB tem afixo

$$z_k = \frac{Lu^k}{c_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

O fator real foi escolhido justamente para que $\operatorname{Re} z_k = L$. As áreas entre duas cevianas consecutivas são

$$S_k = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_{k-1}} z_k) = \frac{L^2 \sin \alpha}{2c_{k-1}c_k}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Ao formar a razão alternada, o fator comum e os cossenos intermediários se cancelam:

$$\frac{S_1 S_3}{S_2 S_4} = \frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{c_0 c_1 c_2 c_3} = \frac{c_4}{c_0} = \cos \theta = \frac{1}{4}.$$

O cancelamento explica por que não precisamos calcular os pontos X, Y, Z individualmente.