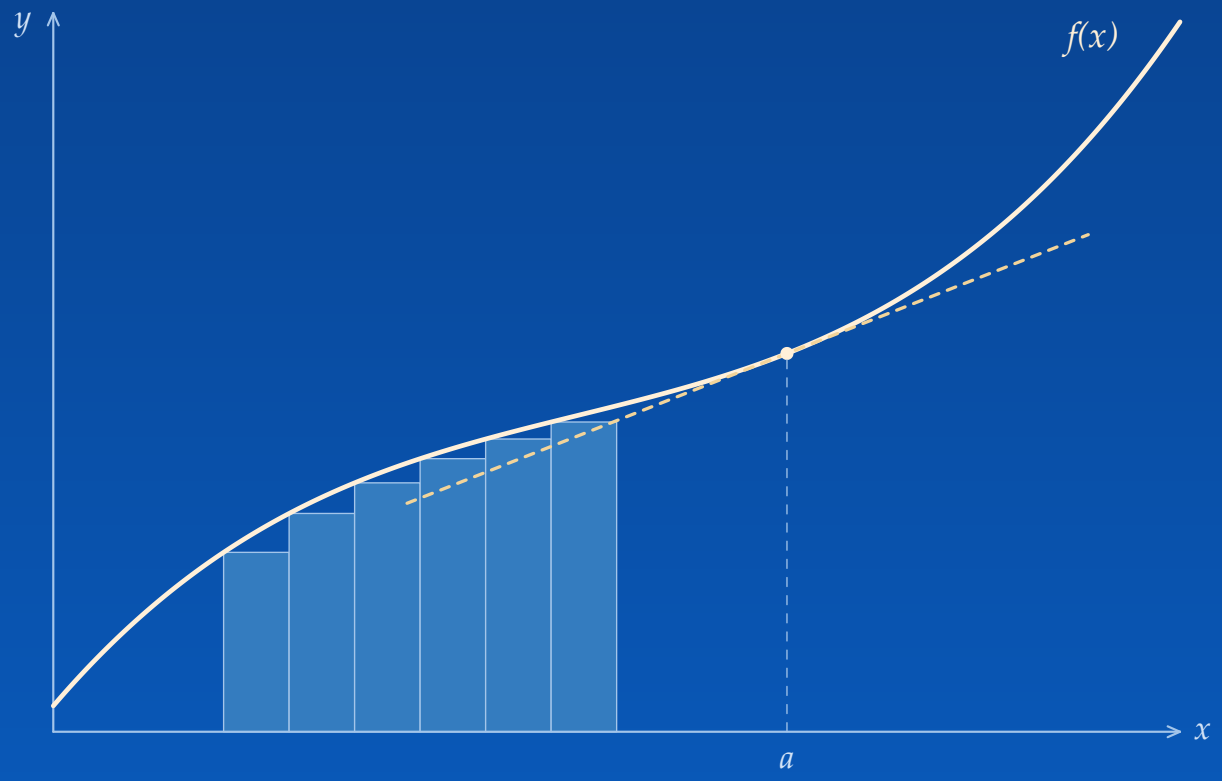
Wallace Santo

TERCEIRA EDIÇÃO

CÁLCULO

um curso prático



LIMITES · DERIVADAS · INTEGRAIS

Teoria, exemplos e aplicações

Escola Naval · EFOMM · Graduação

Prefácio à terceira edição

Escrevi este livro para quem está cursando Cálculo 1 e para quem volta à matéria ao se preparar para um concurso. Nos dois casos, há um momento familiar. Acompanhamos uma solução, entendemos cada igualdade e, diante da questão seguinte, ainda custa descobrir por onde começar. Procurei dar espaço no texto justamente a essa decisão.

Em um problema de volume, por exemplo, podemos saber calcular todas as integrais necessárias e ainda hesitar na escolha da primeira faixa. Um desenho do sólido e de uma seção costuma esclarecer qual grandeza varia e entre que limites. Em uma questão de máximo, uma boa parte do trabalho consiste em escrever a função certa e determinar seu domínio. As contas ganham sentido depois dessas escolhas.

Nesta terceira edição, desenvolvi passagens que antes ficavam a cargo do leitor. As soluções mostram de onde vem uma substituição, em que condições se pode cancelar um fator e o que se conclui da resposta. Incluí também exemplos em que uma hipótese falha. Uma função com um salto, por exemplo, ajuda a entender por que a continuidade faz diferença em um teorema de existência.

O percurso começa pelos limites e segue pelas derivadas, integrais e suas aplicações. A reta tangente reaparece em Taylor como a primeira aproximação de uma função. O estudo do erro leva às sequências, às séries e aos métodos numéricos. Mais adiante, as curvas paramétricas e polares trazem de volta as questões de tangente, comprimento e área em outras coordenadas.

Nas questões de provas universitárias, da Escola Naval e da EFOMM, cabe ao leitor reconhecer qual dos métodos que estudou se aplica ao problema. Os apêndices podem ser consultados à medida que surgirem dúvidas sobre uma demonstração, uma soma finita ou a construção dos números reais.

Espero que, ao fechar o livro depois de uma boa questão, o leitor consiga contar com suas próprias palavras como encontrou o caminho.

Wallace Santo

Novembro de 2026

Orientações de estudo

Para acompanhar o livro, é preciso alguma familiaridade com equações, inequações, funções e trigonometria. Retome esses assuntos à medida que fizerem falta. Às vezes, o que impede o cálculo de um limite é apenas uma fatoração que já não lembramos como fazer.

Na primeira leitura, siga a ordem dos capítulos. O limite permite definir a derivada e a integral, e o Teorema Fundamental do Cálculo explica a ligação entre as duas operações. Ao chegar a um exemplo resolvido, cubra a solução por um instante e tente escrever a primeira linha. Depois compare sua escolha com a do texto. Dois caminhos diferentes podem levar à mesma resposta.

Se uma questão proposta lhe der trabalho, anote o ponto em que parou. Ao consultar a solução, leia até encontrar a ideia que faltava e retome a conta por sua própria mão. Em uma demonstração, experimente fazer o mesmo. Leia o enunciado, identifique o que já sabe e o que precisa provar. Quando houver um contraexemplo, procure no desenho ou na conta o lugar exato em que a conclusão falha.

Nos problemas de volume, esboce um corte do sólido. Se houver rotação, marque o eixo no desenho antes de medir os raios. Em Taylor e nos métodos numéricos, anote a estimativa do erro ao lado do valor aproximado. Ao estudar séries, confira as hipóteses do critério escolhido. Em uma curva paramétrica, acompanhe um ponto enquanto o parâmetro varia. Assim você percebe se um trecho ficou de fora ou se foi percorrido duas vezes.

As seções formais de limites, os apêndices e as soluções que usam números complexos admitem uma segunda leitura. Quando voltar a eles, leve uma pergunta do capítulo que acabou de estudar. O índice remissivo ajuda a encontrar a definição, a prova ou o exemplo de que precisa.

Capítulo 1

Limites

1.1 Aproximação e valor da função

Marque na parábola $y = x^2$ os pontos $(1, 1)$ e (x, x^2), com $x \neq 1$. A reta que os une tem uma inclinação que podemos calcular. Se o segundo ponto caminhar pela parábola em direção ao primeiro, o que acontecerá com essa inclinação? Para descobrir, dividimos a variação vertical pela variação horizontal. Chamando o quociente de $f(x)$, temos

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1.$$

Para todo $x \neq 1$, podemos simplificar $f(x) = x + 1$. Em $x = 1$, entretanto, a expressão original não está definida. Mesmo assim, quando x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2. Escrevemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Uma tabela torna essa aproximação visível antes mesmo de desenharmos o gráfico:

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1

Nas três primeiras colunas, os valores de $f(x)$ aproximam-se de 2 pela esquerda, e, nas três últimas, os valores estão à direita de 2; para acompanhar a aproximação a 1 por valores maiores, leia essas colunas da direita para a esquerda. Na Figura 1, esses valores se acumulam junto ao ponto ausente. A tabela sugere o limite; a simplificação algébrica confirma seu valor.

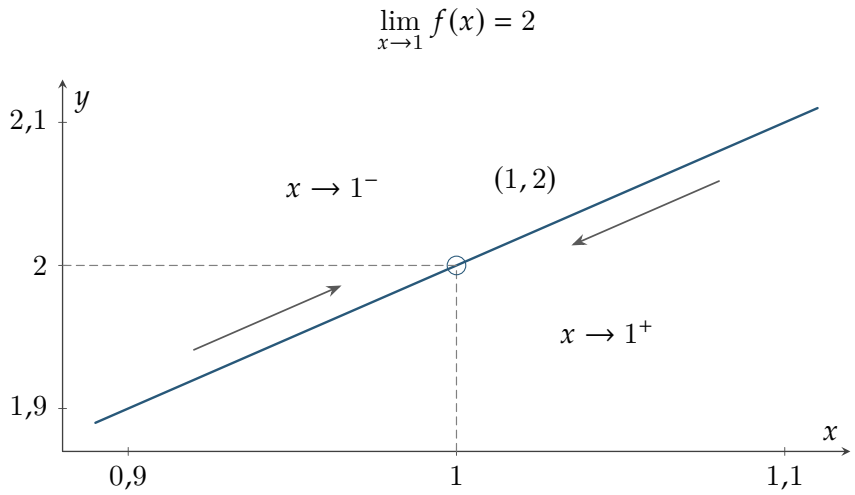


Figura 1: As setas indicam a aproximação a $x = 1$ pelos dois lados. A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida em $x = 1$, mas seus valores se aproximam de 2.

A ideia central é esta: o limite é determinado pelos valores de $f(x)$ para x próximo de a, mas com $x \neq a$. Por isso, o valor de $f(a)$ pode não existir ou pode ser diferente do limite.

Para ver isso sem ambiguidade, defina

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Aqui existe um valor especial no ponto: $g(1) = 3$. Entretanto, perto de 1, com $x \neq 1$, a função segue a reta $y = x + 1$. A Figura 2 distingue o valor $g(1)$ do limite de $g(x)$ quando $x \to 1$. Assim,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2, \qquad g(1) = 3.$$

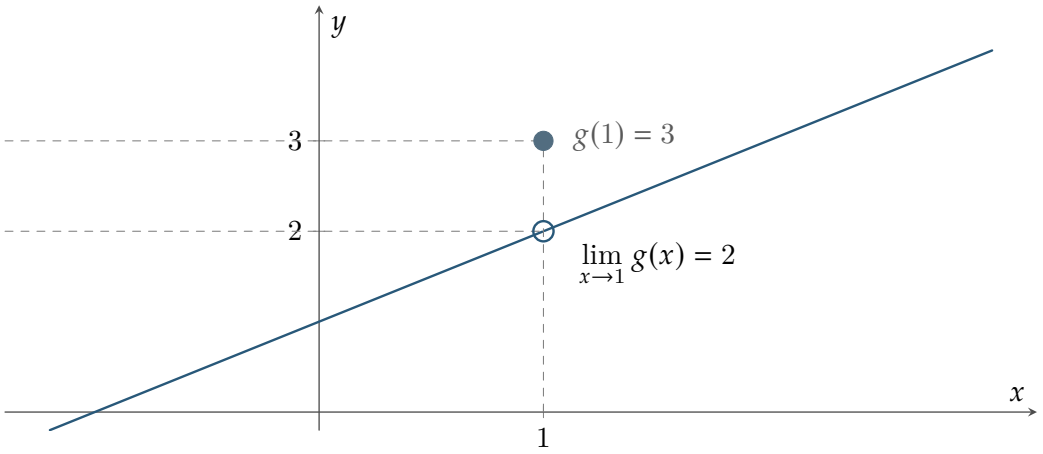


Figura 2: Na função g, o ponto preenchido representa $g(1) = 3$; o círculo aberto mostra que o limite em $x = 1$ é 2.

Exemplo 1.1.

Estime $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Solução. Este exemplo retoma a ideia da abertura com outro ponto de aproximação. Substituir $x = 2$ na expressão original produz $\frac{0}{0}$, que não é um número nem determina o limite. Fatoramos a diferença de quadrados para descrever a função nos pontos próximos de 2. Para $x \neq 2$,

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Quando x se aproxima de 2, a expressão $x+2$ se aproxima de 4. Portanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Exemplo 1.2.

Para $f(x) = 2x-1$, determine uma condição sobre $|x-3|$ que garanta $|f(x)-5| < 0{,}01$.

Solução. O erro na saída está diretamente relacionado ao erro na entrada:

$$|f(x)-5| = |2x-6| = 2|x-3|.$$

Portanto, $|f(x)-5| < 0{,}01$ equivale a $|x-3| < 0{,}005$. Em particular, qualquer entrada com $0 < |x-3| < 0{,}005$ produz o erro desejado. A exclusão de $x = 3$ destaca que a aproximação independe do valor da função no ponto.

Se a tolerância de saída for um número arbitrário $\varepsilon > 0$, basta exigir $0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Chamando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, escrevemos

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-5| < \varepsilon.$$

Essa relação entre uma tolerância de entrada e uma tolerância de saída é a ideia da definição precisa de limite, retomada na Seção 1.11.

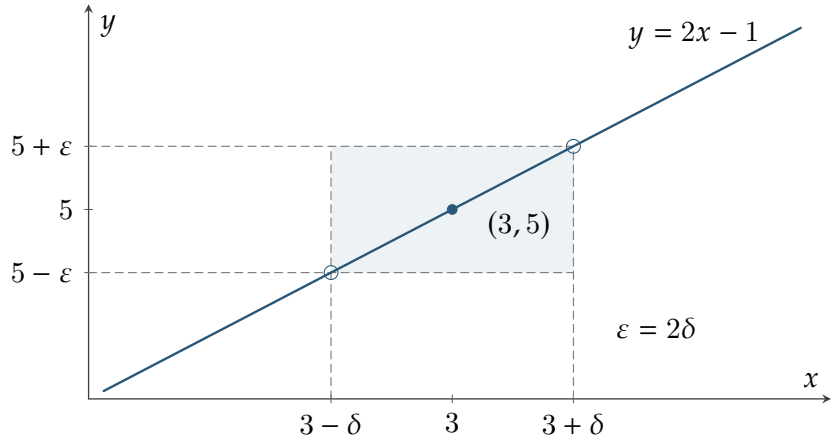


Figura 3: Para a reta $y = 2x - 1$, uma distância menor que δ na entrada produz uma distância menor que $2\delta = \varepsilon$ na saída. As faixas ilustram tolerâncias genéricas.

1.2 Aproximação pelos dois lados

Nem sempre os valores de uma função se aproximam do mesmo número pelos dois lados. O limite à esquerda considera $x < a$; o limite à direita considera $x > a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x), \qquad \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Quando o domínio permite aproximações a a por ambos os lados, o limite bilateral $\lim_{x \to a} f(x)$ existe exatamente quando os dois limites laterais existem e são iguais. Aqui e na definição formal, a aproximação é sempre feita por pontos do domínio. Em um extremo, usamos a notação lateral para explicitar o lado disponível: por exemplo, $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Não exigimos valores de $\sqrt{x}$ para $x < 0$. Na Figura 4, os ramos se aproximam de alturas diferentes em $x = 0$.

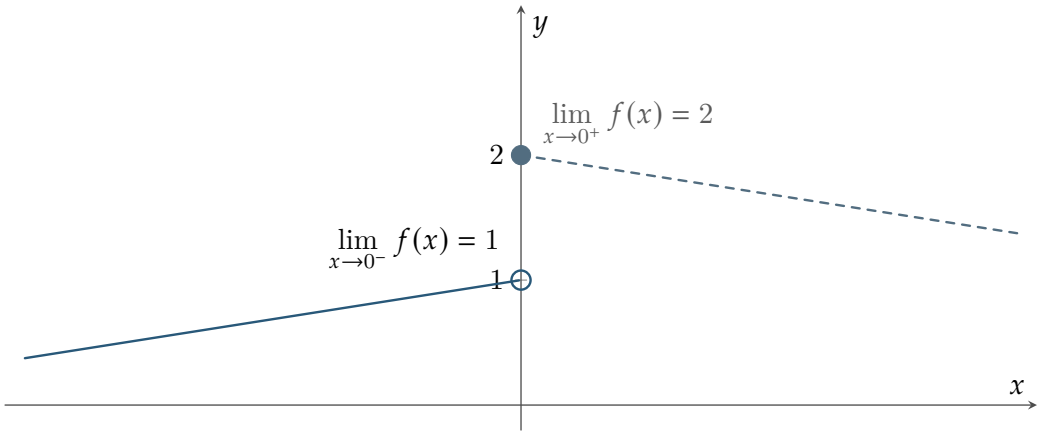


Figura 4: Quando os limites laterais são diferentes, o limite bilateral não existe.

Exemplo 1.3.

Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$, se

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 0, \\ 2 - x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Solução. À esquerda de zero, a condição $x < 0$ determina a expressão $1 + x$, que tende a 1. À direita, usamos $2 - x$, que tende a 2. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$

Como os limites laterais são diferentes, $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

O valor $f(0) = 2$ pertence ao segundo ramo, mas não altera a aproximação pela esquerda. Na figura, o círculo aberto em altura 1 e o ponto preenchido em altura 2 ajudam a distinguir essas duas informações.

1.3 Substituição, fatoração e potências

A primeira decisão é verificar se as leis dos limites permitem substituir o valor de aproximação. Os exemplos desta seção começam por essa situação e passam aos casos em que é necessário transformar a expressão.

1.3.1 Propriedades e substituição direta

Um ponto a é chamado *ponto de acumulação* de um domínio quando há pontos desse domínio, diferentes de a, arbitrariamente próximos de a. Essa condição garante que existe uma aproximação a estudar, mesmo quando a função não está definida no próprio ponto. Por exemplo, 0 é ponto de acumulação de $(0, +\infty)$; já um ponto isolado do domínio não permite tal aproximação. Nos enunciados sobre raízes, o índice n é sempre um inteiro positivo.

As propriedades abaixo são ferramentas de cálculo. Elas valem quando os limites indicados existem.

Teorema 1.1. *Leis básicas dos limites.*

Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$. Defina

$$D = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$$

e suponha que a seja ponto de acumulação de D. Então:

(1) $\lim_{x\to a} c = c$;

(2) $\lim_{x\to a} x = a$;

(3) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

(4) $\lim_{x\to a}[c\,f(x)] = cL$;

(5) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = LM$;

(6) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$;

(7) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$, para todo inteiro $n \geqslant 1$;

(8) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$;

(9) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, desde que a raiz esteja definida perto de a; se n for par, exige-se também $L \geqslant 0$.

As operações envolvendo f e g são consideradas no domínio comum D; no quociente, consideram-se os pontos de D em que $g(x) \neq 0$, condição garantida suficientemente perto de a quando $M \neq 0$.

A demonstração completa das nove leis está na Seção A.2 do Apêndice A. A Seção 1.11 também desenvolve as estimativas das leis algébricas.

As leis podem ser combinadas. Em particular, para todo polinômio p e toda função racional r,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a), \qquad \lim_{x\to a} r(x) = r(a),$$

desde que $r(a)$ esteja definida. Isso justifica a *substituição direta* nessas funções. Resultados análogos para raízes, módulo, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos serão organizados pela continuidade.

Uma reformulação útil consiste em transferir o candidato a limite para o lado da função:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0.$$

De fato, se $f(x) \to L$, a lei da diferença fornece

$$\lim_{x \to a} [f(x) - L] = L - L = 0.$$

Reciprocamente, se $f(x) - L \to 0$, então

$$f(x) = [f(x) - L] + L \to 0 + L = L.$$

Essa equivalência permite concentrar a análise no erro $f(x) - L$.

Exemplo 1.4.

Calcule $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$.

Solução. As leis da soma e do produto permitem calcular o limite de um polinômio substituindo o valor de aproximação. Não há denominador nem restrição de domínio que impeça essa passagem.

Como $x^2 - 3x + 1$ é um polinômio,

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Exemplo 1.5.

Calcule $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$.

Solução. O denominador não se anula em $x = -4$. Podemos usar substituição direta:

$$\frac{(-4)^2 - 4(-4)}{(-4)^2 - 3(-4) - 4} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}.$$

1.3.2 Fatoração e igualdade nas proximidades do ponto

Quando numerador e denominador tendem a zero, a propriedade do limite de um quociente não pode ser aplicada diretamente. A fatoração pode revelar uma expressão equivalente para os pontos que participam da aproximação. Cancelar um fator exige que ele seja diferente de zero nesses pontos.

Exemplo 1.6.

Calcule $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$.

Solução. O numerador e o denominador tendem a zero quando x tende a 5. Por isso, não podemos aplicar diretamente a propriedade do limite de um quociente: essa propriedade exige que o limite do denominador seja diferente de zero. A forma $\frac{0}{0}$ indica que ainda precisamos examinar a expressão; ela não determina o valor do limite.

Como o denominador é $x-5$ e o numerador também se anula em 5, procuramos esse fator no numerador. Os números -5 e -1 têm soma -6 e produto 5. Portanto,

$$x^2-6x+5=(x-5)(x-1).$$

Para todo $x \neq 5$, o fator $x-5$ é diferente de zero e pode ser cancelado:

$$\frac{x^2-6x+5}{x-5}=\frac{(x-5)(x-1)}{x-5}=x-1.$$

A restrição $x \neq 5$ é essencial. A expressão original continua sem estar definida em 5, mas, no cálculo do limite, observamos seus valores quando x se aproxima de 5, com $x \neq 5$. Nesses pontos, ela coincide com $x-1$. Assim,

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x-1)=4.$$

Concluímos que os valores do quociente se aproximam de 4. A igualdade entre as expressões nas proximidades de 5, excetuado o próprio ponto, é o que permite calcular o limite pela expressão simplificada.

O próximo exemplo conserva a mesma estrutura. Identificar o fator que se anula no ponto de aproximação permite repetir o argumento com segurança.

Exemplo 1.7.

Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

Solução. A substituição de $x=1$ produz a forma $\frac{0}{0}$. Para fatorar o numerador, procuramos dois números com soma -3 e produto 2: são -1 e -2. Assim, para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2.$$

Cancelamos $x-1$, que é não nulo nos pontos da aproximação. O polinômio restante permite a substituição:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1.$$

Na variação seguinte, o fator comum precisa ser identificado tanto no numerador quanto no denominador.

Exemplo 1.8.

Calcule $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$.

Solução. A substituição de $x = -1$ produz zero no numerador e no denominador. Procuramos um fator comum que explique essa anulação. Agora, precisamos fatorar os dois polinômios:

$$2x^2+3x+1 = (2x+1)(x+1), \qquad x^2-2x-3 = (x+1)(x-3).$$

O fator comum é $x+1$, que se anula justamente em -1. Para $x \neq -1$, dentro do domínio da expressão original,

$$\frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3} = \frac{(2x+1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2x+1}{x-3}.$$

O denominador original também se anula em 3. Esse ponto não interfere no limite em -1, pois podemos restringir a aproximação a um intervalo em torno de -1 que não contenha 3.

Na expressão simplificada, o denominador tende a -4, que é diferente de zero. A propriedade do limite de um quociente agora se aplica:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3} = \frac{2(-1)+1}{-1-3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

O método foi encontrar uma expressão igual à original nos pontos que participam da aproximação. A dificuldade adicional foi reconhecer o fator comum depois de fatorar também o denominador.

Capítulo 2

Derivadas

2.1 Ideia de derivada

Exemplo 2.1.

A posição de uma partícula é $s(t) = t^2$ metros, com $t \geqslant 0$ medido em segundos. Determine a velocidade média entre os instantes 2 e $2+h$ e a velocidade instantânea em 2.

Solução. A velocidade média é a razão entre deslocamento e intervalo de tempo. Para $h \neq 0$ e $2 + h \geqslant 0$,

$$v_m = \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Por exemplo, $h = 0{,}1$ fornece $4{,}1$ m/s, e $h = -0{,}1$ fornece $3{,}9$ m/s. Os incrementos negativos comparam o instante 2 com um instante anterior. Como $4 + h \to 4$ quando $h \to 0$, a velocidade instantânea é 4 m/s.

A posição nesse instante também tem valor numérico 4, mas é medida em metros. Posição e velocidade são grandezas diferentes; a derivada registra a taxa de variação da posição.

A derivada mede a taxa instantânea de variação de uma função. A taxa média de f entre a e $a + h$ é

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geometricamente, esse quociente é o coeficiente angular da reta secante que passa por $P(a, f(a))$ e $Q(a+h, f(a+h))$. Quando h tende a zero, o ponto Q se aproxima de P; se os coeficientes das secantes tendem a um número real, esse número é o coeficiente angular da tangente em P. A Figura 12 distingue as duas retas.

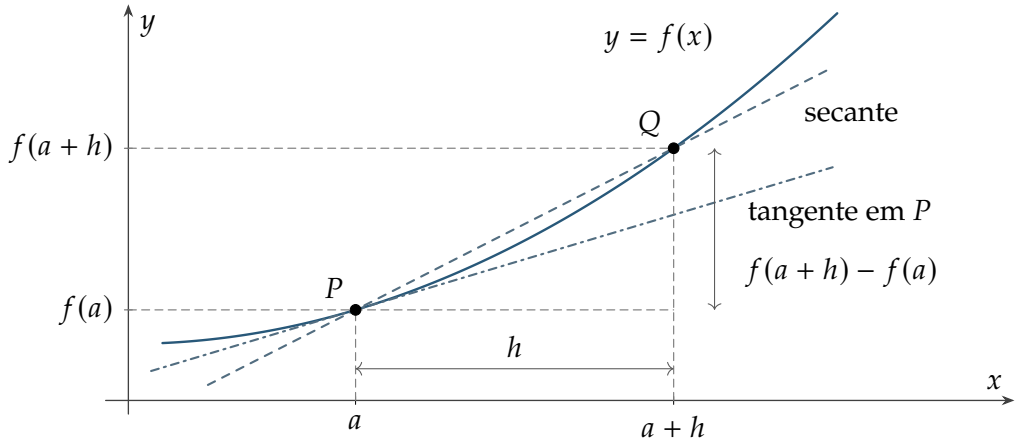


Figura 12: O quociente incremental é a inclinação da secante PQ. A derivada aparece quando Q tende a P.

Assim, a derivada mede a taxa de variação instantânea e fornece a inclinação da aproximação linear da função. Perto de a, quando $f'(a)$ existe,

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Essa aproximação é o ponto de partida das aplicações de derivadas.

2.2 Definição e primeiras consequências

Definição 2.1.

Seja f definida em um intervalo aberto que contém a. Dizemos que f é diferenciável em a quando existe, como número real, o limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Esse limite é chamado de derivada de f em a.

Também podemos usar a variável x. Como $h = x - a$, temos a forma equivalente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é, quando $f'(a)$ existe,

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

O sentido preciso da aproximação linear

A definição permite transformar a aproximação da introdução em uma igualdade com erro explícito. Se $m = f'(a)$, defina, para $h \neq 0$,

$$\eta(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m.$$

Pela definição da derivada, $\eta(h) \to 0$. Multiplicando por h e isolando $f(a+h)$, obtemos

$$f(a+h) = f(a) + mh + h\eta(h).$$

A reta fornece $f(a)+mh$, e o erro exato é $h\eta(h)$. Além de tender a zero, esse erro se torna pequeno em comparação com o incremento:

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - mh|}{|h|} = |\eta(h)| \longrightarrow 0.$$

Aqui comparamos o erro com $|h|$, não com $|f(a+h)|$. A afirmação continua fazendo sentido quando a função se anula no centro.

A recíproca também vale. Se podemos escrever $f(a+h) = f(a) + mh + h\eta(h)$, com $\eta(h) \to 0$, então, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m + \eta(h) \longrightarrow m.$$

Logo $f'(a) = m$. Ser diferenciável equivale a admitir essa aproximação linear com erro menor, em proporção, que o incremento.

A inclinação m é a única com essa propriedade. Se usarmos outra inclinação q, teremos

$$\frac{f(a+h) - f(a) - qh}{h} = m - q + \eta(h) \longrightarrow m - q.$$

Esse limite só é zero quando $q = m$. É nesse sentido local e preciso que a tangente fornece a melhor aproximação linear que passa pelo ponto do gráfico.

Para $f(x) = x^2$ em $a = 1$, a identidade

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

mostra o mecanismo inteiro: a reta é $1+2h$, o erro é h^2 e o erro dividido por $|h|$ é $|h|$, que tende a zero. A distância entre curva e reta fica cada vez menor em relação à distância horizontal percorrida.

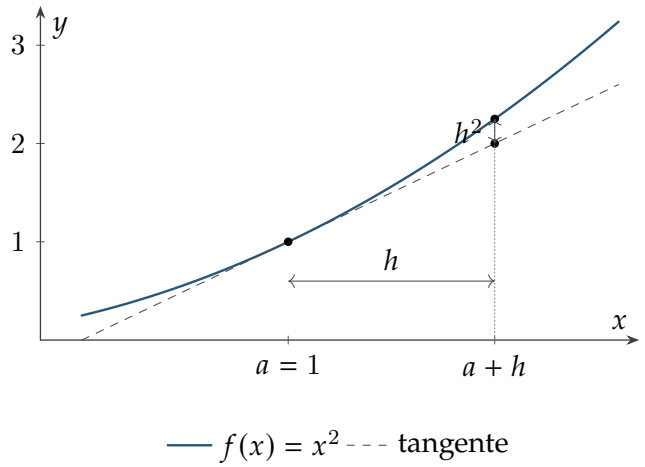


Figura 13: Para $f(x) = x^2$ perto de 1, a reta tangente fornece $1+2h$, e a distância vertical restante é h^2. A figura usa $h = 1/2$; a identidade vale para qualquer incremento.

Definição 2.2.

As derivadas laterais de f em a são

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando esses limites existem como números reais finitos. A derivada usual existe em um ponto interior a se, e somente se, as duas derivadas laterais existem e são iguais. Limites laterais infinitos descrevem a inclinação das secantes, mas não constituem derivadas finitas.

Teorema 2.1.

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Demonstração. A continuidade pede que a diferença $f(a+h) - f(a)$ tenda a zero. A hipótese, porém, controla essa diferença dividida por h. Por isso, reescrevemos a diferença como o produto do quociente incremental por h.

Para $h \neq 0$,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\, h.$$

Tomando $h \to 0$, o primeiro fator tende a $f'(a)$ e o segundo tende a 0. Logo $f(a+h) - f(a) \to 0$, isto é, $f(a+h) \to f(a)$. □

A recíproca é falsa: uma função pode ser contínua e não ser diferenciável, como ocorre em quinas e tangentes verticais. A Figura 14 também mostra uma descontinuidade, que impede a diferenciabilidade pelo teorema anterior. Além desses casos, uma oscilação pode impedir que o quociente incremental tenha limite.

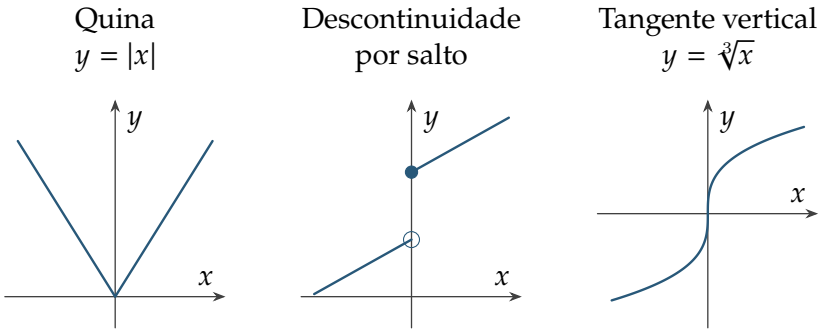


Figura 14: Três obstruções frequentes à diferenciabilidade: quina, descontinuidade e tangente vertical.

Contraexemplo: secantes simétricas podem esconder uma quina

O quociente $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ compara dois pontos que se movem, um de cada lado de a. Seu limite não substitui, em geral, a definição de derivada, na qual um dos pontos permanece fixo em $(a, f(a))$.

Para $f(x) = |x-1|$ e $a = 1$, temos $f(1+h) = |h| = f(1-h)$. Logo,

$$\frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} = 0 \qquad (h \neq 0).$$

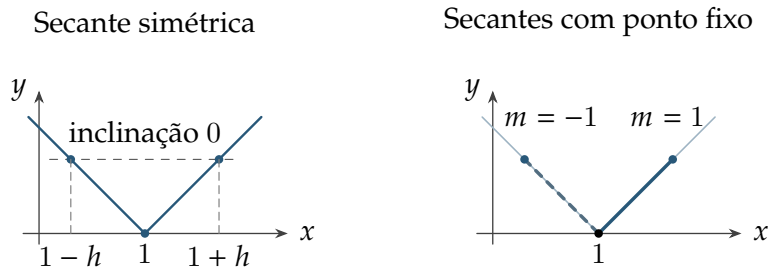
Já o quociente da definição é

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & h < 0, \\ 1, & h > 0. \end{cases}$$

As derivadas laterais são diferentes, portanto $f'(1)$ não existe. As secantes simétricas são horizontais porque suas extremidades têm a mesma altura; elas ocultam a mudança de inclinação na quina. Se a derivada usual existe, o quociente simétrico também converge para ela, pois

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}\right).$$

O contraexemplo mostra que a recíproca não é válida.



Em $y = |x-1|$, os pontos simétricos têm a mesma altura. Com um ponto fixo na quina, as inclinações dos dois lados são diferentes.

2.3 Primeiras derivadas pela definição

Exemplo 2.2.

Calcule a derivada de $f(x) = c$, com c constante.

Solução. Para qualquer ponto a, temos $f(a+h) = f(a) = c$. Portanto,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

A função não varia, e a tangente ao seu gráfico é horizontal.

Exemplo 2.3.

Calcule a derivada de $f(x) = mx + b$.

Solução. O incremento na entrada é multiplicado pelo coeficiente m. De fato, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + b - (ma+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

Logo $f'(a) = m$. A inclinação é a mesma em todos os pontos; a tangente coincide com a própria reta.

Exemplo 2.4.

Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ em a.

Solução. Expandimos o quadrado para tornar visível o fator que será cancelado:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h, \qquad h \neq 0.\end{aligned}$$

Assim, $f'(a) = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$. O cancelamento ocorre antes do limite, sem substituir $h = 0$ no quociente original.

A função derivada é $f'(x) = 2x$. Em $a = -1, 0, 1$, suas inclinações são $-2, 0, 2$. Pela equação $y - a^2 = 2a(x-a)$, as tangentes são, respectivamente, $y = -2x - 1$, $y = 0$ e $y = 2x - 1$, representadas na Figura 15.

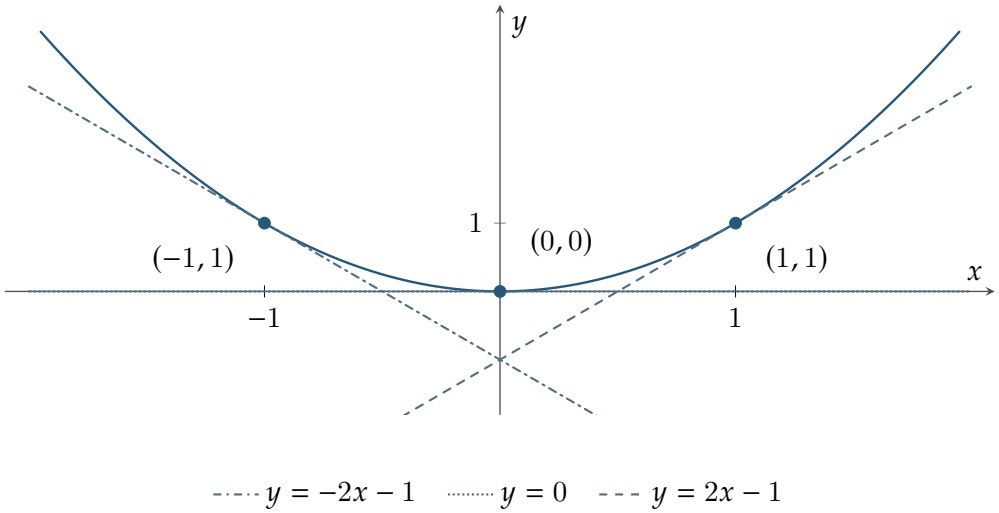


Figura 15: Tangentes a $y = x^2$ nos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Exemplo 2.5.

Calcule a derivada de $f(x) = x^3$ em a.

Solução. Pelo binômio de Newton,

$$(a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3.$$

Logo, para $h \neq 0$,

$$\frac{(a + h)^3 - a^3}{h} = \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2.$$

Os termos com h tendem a zero. Portanto, $f'(a) = 3a^2$.

Exemplo 2.6.

Calcule, pela definição, a derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Solução. Fixe $a \neq 0$ e tome $|h| < |a|/2$, de modo que $a + h \neq 0$. Para $h \neq 0$,

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a + h)}{a(a + h)h} = \frac{-h}{a(a + h)h}$$
$$= -\frac{1}{a(a + h)}.$$

Quando $h \to 0$, o denominador tende a $a^2 \neq 0$. Portanto, $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Exemplo 2.7.

Calcule pela definição a derivada de $f(x) = \sqrt{x+2}$ em $a > -2$.

Solução. A diferença de raízes sugere multiplicar pelo conjugado. Para $h \neq 0$ suficientemente pequeno, $a + h + 2 > 0$, e

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h+2} - \sqrt{a+2}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h+2} - \sqrt{a+2})(\sqrt{a+h+2} + \sqrt{a+2})}{h(\sqrt{a+h+2} + \sqrt{a+2})} \\ &= \frac{(a+h+2) - (a+2)}{h(\sqrt{a+h+2} + \sqrt{a+2})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h+2} + \sqrt{a+2})} = \frac{1}{\sqrt{a+h+2} + \sqrt{a+2}}.\end{aligned}$$

O denominador tende a $2\sqrt{a+2} > 0$. Logo, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a+2}}$. O conjugado elimina a diferença de raízes e revela o fator h que pode ser cancelado.

2.6 Regra da cadeia

Sejam $u = x^2$ e $y = (1+u)^2$. Quando x passa de 1 a $1+h$, a entrada da segunda função passa de 1 a $1+\Delta u$, com

$$\Delta u = (1+h)^2 - 1 = 2h + h^2.$$

Como y passa de 4 a $(2+\Delta u)^2$, sua variação é $\Delta y = 4\Delta u + (\Delta u)^2$. Para $h \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{\Delta y}{h} = (4+\Delta u)\frac{\Delta u}{h} = (4+\Delta u)(2+h) \longrightarrow 4 \cdot 2 = 8.$$

Os dois fatores têm origens diferentes. Perto de $x = 1$, a variação de u é aproximadamente o dobro da variação de x. Perto de $u = 1$, a variação de y é aproximadamente quatro vezes a variação de u. Por isso as taxas se multiplicam. Em uma composição $f(g(x))$, a primeira variação começa em $x = a$ e a segunda começa em $u = g(a)$.

Teorema 2.3.

Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável em a, e

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Demonstração. Queremos separar a variação da função externa da variação da interna. Dividir diretamente por $g(a+h) - g(a)$ seria problemático, pois essa diferença pode ser zero mesmo com $h \neq 0$. Em vez disso, escreveremos a variação de f como sua parte linear mais um erro controlado.

Seja $b = g(a)$. Para $k \neq 0$, defina

$$\varepsilon(k) = \frac{f(b+k) - f(b)}{k} - f'(b).$$

A definição de $f'(b)$ garante $\varepsilon(k) \to 0$ quando $k \to 0$. Definimos também $\varepsilon(0) = 0$, tornando essa função de erro contínua em zero. Aqui $\varepsilon(k)$ denota uma função, e não uma tolerância fixa. Multiplicando a igualdade por k e reorganizando,

$$f(b+k) - f(b) = [f'(b) + \varepsilon(k)]k.$$

Essa identidade vale também para $k = 0$, quando ambos os membros são zero.

Tomamos agora $k = g(a+h) - g(a)$, a variação produzida pela função interna. A diferenciabilidade de g implica continuidade, logo $k \to 0$ quando $h \to 0$. Substituindo na identidade e dividindo apenas por $h \neq 0$, obtemos

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = [f'(b) + \varepsilon(k)]\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

O primeiro fator tende a $f'(b)$, inclusive se $k = 0$ em alguns incrementos; o segundo tende a $g'(a)$. Pela lei do produto dos limites,

$$(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Assim, a prova também abrange incrementos em que a função interna repete seu valor.□

Reconhecer a composição

Para calcular $f(g(x))$, começamos pela entrada x. Aplicamos g a esse número e usamos o resultado $u = g(x)$ como entrada de f. Para derivar, convém começar pela última operação feita e perguntar qual foi sua entrada. Na notação de Leibniz, o fator $\mathrm{d}y/\mathrm{d}u$ mede a variação de y em relação a essa entrada. O fator $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ leva em conta que a própria entrada varia com x.

Exemplo 2.21.

Considere $F(x) = (5 - 2x)^2$ e $G(x) = 5 - 2x^2$. Calcule as derivadas em $x = 1$. Por que a posição do quadrado muda a conta?

Solução. Em F, elevamos ao quadrado o resultado inteiro de $5 - 2x$. Escrevendo $u = 5 - 2x$, temos $F(x) = u^2$. A derivada do quadrado em relação a u é $2u$, enquanto u varia à taxa de -2 em relação a x. Logo,

$$F'(x) = 2u\,(-2) = -4(5 - 2x).$$

Em $x = 1$, a entrada do quadrado é $u = 3$. Assim, $F'(1) = 2 \cdot 3 \cdot (-2) = -12$. O sinal faz sentido. Perto desse ponto, aumentar x diminui o número positivo que estamos elevando ao quadrado.

Em G, elevamos primeiro x ao quadrado. A última operação aplica a função $v \mapsto 5 - 2v$ ao valor $v = x^2$. Portanto

$$G'(x) = (-2) \cdot 2x = -4x, \qquad G'(1) = -4.$$

Podemos conferir a primeira conta pela distributividade. Como $F(x) = 25 - 20x + 4x^2$, temos $F'(x) = -20 + 8x$, que também vale -12 em $x = 1$.

Exemplo 2.22.

Derive $y = (3x^2 + 4x)^5$.

Solução. A função externa é a quinta potência e a interna é $u = 3x^2 + 4x$. Temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 5u^4, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 6x + 4.$$

Pela cadeia, multiplicamos as duas derivadas e recolocamos o argumento:

$$y' = 5u^4(6x + 4) = 5(3x^2 + 4x)^4(6x + 4).$$

Quando há mais de duas operações

Exemplo 2.23.

Derive $y = \dfrac{1}{1+(2x-1)^2}$. Em que ponto a reta tangente ao gráfico é horizontal?

Solução. Para calcular y, subtraímos 1 de $2x$, somamos 1 ao quadrado do resultado e, por fim, tomamos o recíproco. Podemos guardar os resultados intermediários em duas variáveis:

$$x \xrightarrow{2x-1} u \xrightarrow{1+u^2} v \xrightarrow{1/v} y.$$

Como $v = 1 + u^2 \geqslant 1$, o recíproco está definido para todo x. Comecemos por ele. Sua derivada em relação a v é $-1/v^2$. Para obter a derivada em relação a x, ainda precisamos saber como v varia com u e como u varia com x. Duas aplicações da cadeia dão

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \left(-\frac{1}{v^2}\right)(2u)(2) = -\frac{4(2x-1)}{\left(1+(2x-1)^2\right)^2}.$$

O denominador é positivo. A derivada só se anula quando $2x - 1 = 0$, isto é, em $x = 1/2$. Nesse ponto $y = 1$, e a tangente é a horizontal $y = 1$. O fator que se anulou veio do quadrado, cuja inclinação é zero quando sua entrada é zero.

Exemplo 2.24.

Derive $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, com $x > -1$.

Solução. Há duas raízes compostas. Para $x > -1$, ambas podem ser derivadas. Primeiro,

$$u = 1 + \sqrt{1+x}, \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot 1.$$

Como $y = \sqrt{u}$, a cadeia fornece

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}.$$

Escolher a regra pela última operação

Na expressão seguinte, a última operação é uma multiplicação. Isso indica qual regra usar primeiro. A composição volta a aparecer quando derivamos cada um dos fatores.

Exemplo 2.25.

Derive $y = (x^2 + 1)^3(x - 2)^4$.

Solução. Sejam $u = (x^2 + 1)^3$ e $v = (x - 2)^4$. Pela cadeia,

$$u' = 3(x^2 + 1)^2(2x) = 6x(x^2 + 1)^2, \qquad v' = 4(x - 2)^3.$$

Pelo produto,

$$\begin{aligned} y' &= 6x(x^2 + 1)^2(x - 2)^4 + 4(x^2 + 1)^3(x - 2)^3 \\ &= (x^2 + 1)^2(x - 2)^3\big[6x(x - 2) + 4(x^2 + 1)\big] \\ &= (x^2 + 1)^2(x - 2)^3(10x^2 - 12x + 4). \end{aligned}$$

A fatoração é opcional, mas reúne os fatores comuns sem dividir por eles e vale também em $x = 2$.

Trabalhar com valores, gráficos e medidas

Para calcular a derivada da composição em um ponto, basta acompanhar o que acontece nesse ponto. O valor da função interna diz onde procurar a inclinação da externa.

Exemplo 2.26.

Suponha $g(1) = 2$, $g'(1) = -3$ e $f'(2) = 4$, com as funções diferenciáveis nos pontos indicados. Calcule $(f \circ g)'(1)$.

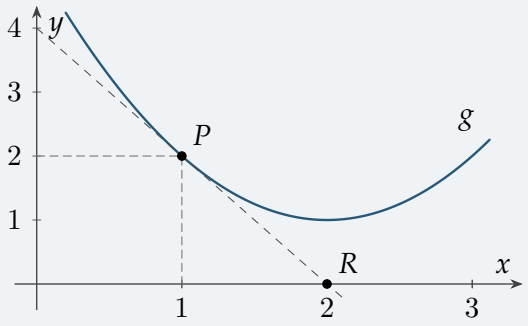
Solução. A derivada externa deve ser avaliada na saída da função interna. Pela cadeia,

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2)(-3) = 4(-3) = -12.$$

Não precisamos conhecer as expressões completas das funções. O dado $f'(2)$, e não $f'(1)$, é o relevante porque $g(1) = 2$.

Exemplo 2.27.

O gráfico abaixo mostra uma função g e sua tangente no ponto P, de abscissa 1. A tangente corta o eixo horizontal em R. Seja $H(x) = 1/g(x)$ onde $g(x) \neq 0$. Use a figura para determinar $H'(1)$.



Solução. O ponto $P = (1, 2)$ pertence ao gráfico, portanto $g(1) = 2$. Para obter $g'(1)$, lemos a inclinação da tangente. De $P = (1, 2)$ até $R = (2, 0)$ a reta desce duas unidades enquanto avança uma. Logo

$$g'(1) = \frac{0 - 2}{2 - 1} = -2.$$

A função externa é $f(u) = 1/u$. Como $g(1) = 2$, a inclinação externa de que precisamos é $f'(2) = -1/2^2 = -1/4$. Temos, então,

$$H'(1) = f'(g(1))g'(1) = \left(-\frac{1}{4}\right)(-2) = \frac{1}{2}.$$

As duas leituras do desenho tiveram papéis diferentes. A altura de P forneceu a entrada do recíproco, e a reta por P e R forneceu a taxa interna. O sinal positivo também era esperado. Perto de P, g é positiva e, ao passar por esse ponto, está diminuindo. Seu recíproco está aumentando.

Exemplo 2.28.

Em um lago, a temperatura da água à profundidade z é dada por $T(z) = 20 - z^2/50$, para $0 \leqslant z \leqslant 10$, com z em metros e T em graus Celsius. O perfil de temperatura permanece constante durante a medição. Uma sonda desce à velocidade de $0{,}4$ m/min no instante em que passa pelos 5 m de profundidade. A que taxa muda a temperatura registrada nesse instante?

Solução. A sonda mede a temperatura do lugar em que se encontra. Se $z(t)$ é a profundidade no instante t, a leitura é $\Theta(t) = T(z(t))$. A profundidade aumenta no sentido da descida. No instante considerado, que chamaremos de t_0, temos $z(t_0) = 5$ e $z'(t_0) = 0{,}4$.

Derivando o perfil em relação à profundidade, obtemos $T'(z) = -z/25$, de modo que $T'(5) = -1/5$ grau Celsius por metro. Para passar de graus por metro a graus por minuto, multiplicamos pela velocidade da sonda:

$$\Theta'(t_0) = T'\big(z(t_0)\big)z'(t_0) = \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{2}{5} = -\frac{2}{25}.$$

Nesse instante, a temperatura registrada cai à taxa de $0{,}08$ grau Celsius por minuto. Se a sonda passasse pela mesma profundidade em sentido contrário, com a mesma rapidez, o primeiro fator continuaria igual e o segundo mudaria de sinal.

Um ponto em que a fórmula exige cuidado

Exemplo 2.29.

Compare $A(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ e $B(x) = \sqrt{(x-2)^4}$. Quais dessas funções têm derivada em $x = 2$?

Solução. As duas funções internas valem zero em $x = 2$. A raiz quadrada não tem derivada finita em zero, de modo que, nesse ponto, falta uma das hipóteses da regra da cadeia. A identidade $\sqrt{w^2} = |w|$ nos permite decidir a questão diretamente.

Para a primeira função, $A(x) = |x-2|$ e $A(2) = 0$. Se $h \neq 0$, o quociente incremental é

$$\frac{A(2+h) - A(2)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Seu valor é -1 à esquerda e 1 à direita. Assim, $A'(2)$ não existe.

Para a segunda, $(x-2)^4 = \big((x-2)^2\big)^2$. Como $(x-2)^2 \geqslant 0$, resulta $B(x) = |(x-2)^2| = (x-2)^2$. Então $B'(x) = 2(x-2)$ e $B'(2) = 0$. A mesma dificuldade na aplicação da fórmula levou a duas respostas diferentes. O comportamento da composição no ponto foi decidido pela expressão da própria função.

A regra do quociente.

Escrevemos o quociente como um produto pelo recíproco de g. Assim, podemos usar as regras já demonstradas em vez de trabalhar com uma diferença de frações desde o início. A derivada de $1/u$, obtida pela definição, é $-1/u^2$. Se $g(a) \neq 0$, a continuidade mantém $g \neq 0$ perto de a; por exemplo, basta exigir $|g(x) - g(a)| < |g(a)|/2$. Pela cadeia,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g(x)^2}g'(x).$$

Aplicando a regra do produto e reunindo as parcelas no denominador g^2,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

3.4 Convexidade e desigualdades

O sinal de f'' controla a variação das inclinações das tangentes e, portanto, a concavidade do gráfico.

Uma função é *convexa*, ou tem concavidade para cima, quando, entre quaisquer dois pontos de seu gráfico, o segmento que os une fica sobre o gráfico ou coincide com ele. Com a desigualdade invertida, temos concavidade para baixo. Para funções duas vezes diferenciáveis, o sinal da segunda derivada permite reconhecer esses comportamentos.

Teorema 3.9. *Critérios da segunda derivada.*

Se f é duas vezes diferenciável em um intervalo, então, tomando c interior nos itens (ii) e (iii):

(i) $f'' > 0$ implica concavidade para cima, e $f'' < 0$ implica concavidade para baixo;

(ii) se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então c é ponto de mínimo local;

(iii) se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então c é ponto de máximo local.

Demonstração. A concavidade foi definida pela posição do gráfico em relação às cordas. Para ligar essa definição a f'', compararemos as inclinações de duas secantes adjacentes por meio do Valor Médio. Para o primeiro item, $f'' > 0$ torna f' estritamente crescente, pelo critério de monotonicidade. Dados $u < z < v$, o TVM em $[u, z]$ e em $[z, v]$ fornece $p \in (u, z)$, $q \in (z, v)$ tais que

$$\frac{f(z) - f(u)}{z - u} = f'(p) < f'(q) = \frac{f(v) - f(z)}{v - z}.$$

Como $z - u > 0$ e $v - z > 0$, multiplicar pelos denominadores preserva a desigualdade:

$$\begin{aligned}(v - z)\big(f(z) - f(u)\big) &< (z - u)\big(f(v) - f(z)\big),\\ (v - u)f(z) &< (v - z)f(u) + (z - u)f(v).\end{aligned}$$

Dividindo por $v - u > 0$, obtemos

$$f(z) < \frac{v - z}{v - u} f(u) + \frac{z - u}{v - u} f(v).$$

O lado direito é a altura da corda que une $(u, f(u))$ a $(v, f(v))$, na abscissa z. Portanto o gráfico fica abaixo da corda, como exige a definição. Se $f'' < 0$, as desigualdades se invertem. O mesmo raciocínio com desigualdades não estritas cobre $f'' \geqslant 0$ e $f'' \leqslant 0$. Para o segundo item, queremos obter os sinais de f' dos dois lados de c. Não é preciso supor que f'' seja contínua: a própria definição de $f''(c)$ basta. Temos

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c) > 0.$$

Como $f'(c) = 0$, o quociente $f'(x)/(x - c)$ é positivo suficientemente perto de c. Assim f' é negativa imediatamente à esquerda de c e positiva imediatamente à direita. O teste da primeira derivada fornece um mínimo local. Se $f''(c) < 0$, o mesmo quociente

é negativo perto de c; então f' é positiva à esquerda e negativa à direita, fornecendo um máximo local pelo mesmo teste. □

A condição $f''(c) = 0$, isoladamente, não garante um ponto de inflexão; é necessário que a concavidade mude em c. A convexidade transforma diversas desigualdades em problemas de mínimo.

Para uma função diferenciável com f' crescente, o gráfico também fica acima de cada tangente. De fato, o TVM entre a e x dá $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Se $x > a$, então $f'(c) \geqslant f'(a)$; se $x < a$, $f'(c) \leqslant f'(a)$, mas o fator $x - a$ é negativo. Nos dois casos,

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a).$$

Para concavidade para baixo, a desigualdade se inverte.

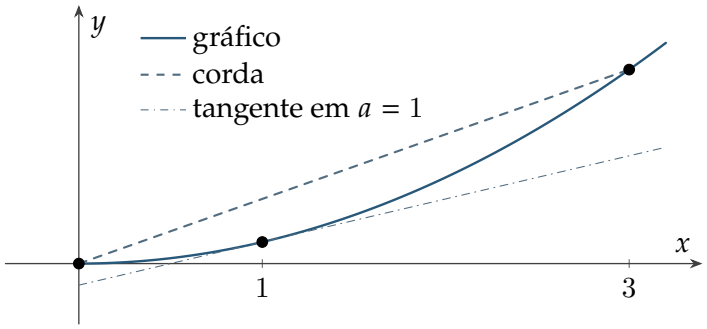


Figura 26: Na concavidade para cima, a corda fica acima do gráfico e a tangente fica abaixo.

Um *ponto de inflexão* é um ponto $(c, f(c))$ do gráfico em que a função é contínua e a concavidade muda de um lado para o outro. Não basta que $f''(c) = 0$; também não é necessário que a segunda derivada exista nesse ponto.

Exemplo 3.21.

Compare o comportamento de x^3, x^4 e $\dfrac{1}{x}$ perto de zero quanto à concavidade e à inflexão.

Solução. Para $f(x) = x^3$, temos $f''(x) = 6x$: a concavidade é para baixo à esquerda e para cima à direita. Como f é contínua em zero, $(0, 0)$ é ponto de inflexão.

Para $g(x) = x^4$, $g''(x) = 12x^2 > 0$ nos dois lados. Embora $g''(0) = 0$, a concavidade não muda; não há inflexão. Para $h(x) = \frac{1}{x}$, $h''(x) = \frac{2}{x^3}$ tem sinais opostos nos dois lados de zero, mas $h(0)$ não existe. Portanto zero não corresponde a ponto de inflexão de seu gráfico.

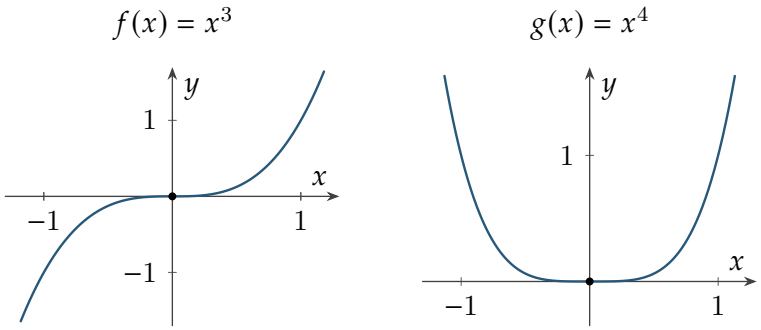


Figura 27: Segunda derivada nula em zero: inflexão para x^3, ausência de inflexão para x^4.

Exemplo 3.22.

Prove que

$$\ln x \leqslant x - 1, \qquad x > 0,$$

com igualdade apenas em $x = 1$.

Solução. A desigualdade $\ln x \leqslant x - 1$ equivale a $x - 1 - \ln x \geqslant 0$. Procuramos mostrar que essa diferença tem mínimo igual a zero. Considere $F(x) = x - 1 - \ln x$, definida para $x > 0$. Temos

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

O denominador é positivo no domínio; assim $F' < 0$ em $(0, 1)$ e $F' > 0$ em $(1, \infty)$. Portanto F tem mínimo global em 1, cujo valor é $F(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$. Segue que $F(x) \geqslant 0$, isto é, $\ln x \leqslant x - 1$. Como os sinais da derivada são estritos fora de 1, a igualdade ocorre apenas nesse ponto.

Exemplo 3.23.

Prove que

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Solução. Esta é uma nova demonstração, por derivadas, das desigualdades já usadas no estudo dos limites trigonométricos. Separamos a desigualdade dupla nas metas $x - \operatorname{sen} x > 0$ e $\operatorname{tg} x - x > 0$. Ambas as diferenças valem zero na origem; basta mostrar que crescem à direita dela. Para $A(x) = x - \operatorname{sen} x$, temos $A(0) = 0$ e $A'(x) = 1 - \cos x > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2})$. Pelo crescimento estrito, $A(x) > A(0) = 0$, logo $\operatorname{sen} x < x$.

Para $B(x) = \operatorname{tg} x - x$, temos $B(0) = 0$ e

$$B'(x) = \sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x > 0$$

no mesmo intervalo. Assim $B(x) > B(0) = 0$, ou $x < \operatorname{tg} x$. Juntando as duas comparações, $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

Exemplo 3.24.

Prove que

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad x > 0.$$

Solução. A desigualdade desejada equivale a mostrar que

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} > 0.$$

Definimos essa diferença como $F(x) = \operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}$. Como $F(0) = 0$, basta provar que F cresce estritamente para $x > 0$. Para estudar o sinal de F', calculamos também a segunda derivada:

$$F'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \qquad F''(x) = x - \operatorname{sen} x,$$

com $F(0) = F'(0) = 0$. Pelo exemplo anterior, $x - \operatorname{sen} x > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Para $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, usamos $\operatorname{sen} x \leqslant 1$:

$$x - \operatorname{sen} x \geqslant \frac{\pi}{2} - 1 > 0.$$

Logo $F''(x) > 0$ para todo $x > 0$. O crescimento estrito de F' em $[0, \infty)$ implica $F'(x) > F'(0) = 0$ para $x > 0$. Aplicando o critério a F, obtemos $F(x) > F(0) = 0$. Reorganizando os termos, segue $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$.

3.5 Otimização

Em um problema de otimização, escolhemos uma variável, identificamos as restrições impostas pelo enunciado e escrevemos a função cujo máximo ou mínimo procuramos. Essa função é chamada *função objetivo*.

Exemplo 3.25.

Um fazendeiro tem $1200\,\mathrm{m}$ de cerca e quer cercar um campo retangular à margem de um rio reto. Não haverá cerca ao longo do rio. Quais dimensões maximizam a área?

Solução. Seja x o comprimento de cada lado perpendicular ao rio e y o lado paralelo que recebe cerca. Há dois lados de comprimento x e apenas um de comprimento y; portanto

$$2x + y = 1200, \qquad y = 1200 - 2x.$$

As dimensões devem ser positivas: $0 < x < 600$. A área é

$$A(x) = xy = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2.$$

Sua derivada é $A'(x) = 1200 - 4x$. Assim $A'(x) = 0$ equivale a $4x = 1200$, ou $x = 300$. A derivada é positiva em $(0, 300)$ e negativa em $(300, 600)$. Logo esse ponto fornece o

máximo global no domínio físico. Se estendermos a fórmula a $[0, 600]$, as extremidades representam campos degenerados, ambos com área zero.

Portanto os lados perpendiculares medem $300\,\mathrm{m}$, o lado paralelo mede $1200 - 2 \cdot 300 = 600\,\mathrm{m}$, e a área máxima é $300 \cdot 600 = 180000\,\mathrm{m}^2$.

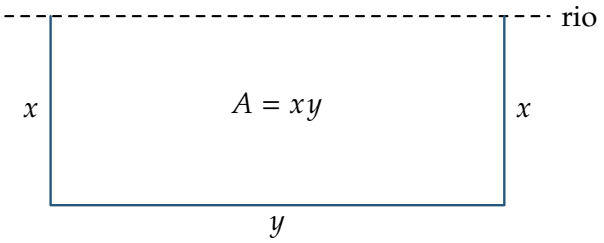


Figura 28: Apenas os três lados indicados recebem cerca.

Exemplo 3.26.

Uma lata cilíndrica fechada deve conter $1\,\mathrm{L}$ de óleo. Encontre as dimensões que minimizam a quantidade de metal.

Solução. Usando centímetros, a restrição de volume é $\pi r^2 h = 1000$, pois $1\,\mathrm{L} = 1000\,\mathrm{cm}^3$. As duas bases contribuem com $2\pi r^2$. Aberta em um plano, a lateral tem largura $2\pi r$ e altura h, com área $2\pi r h$. Logo

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Da restrição, $h = \frac{1000}{\pi r^2}$, com $r > 0$. Substituindo,

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

A derivada é

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}.$$

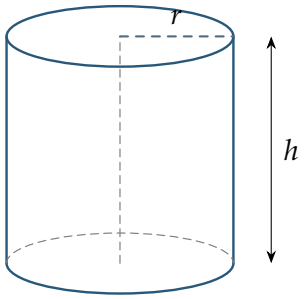
Como $r^2 > 0$, ela se anula quando $\pi r^3 = 500$, é negativa antes desse valor de r e positiva depois. Isso demonstra o mínimo global no domínio positivo. Além disso, $A(r) \to +\infty$ quando $r \to 0^+$ ou $r \to +\infty$.

No ponto de mínimo, a restrição fornece

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r.$$

Portanto as dimensões que minimizam o metal são

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\,\mathrm{cm}, \qquad h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\,\mathrm{cm}.$$



duas bases: $2\pi r^2$

lateral: $2\pi r h$

Figura 29: Raio e altura da lata; as duas bases entram no cálculo da área.

Exemplo 3.27.

Encontre a área máxima de um retângulo com base no eixo x, lados verticais e vértices superiores na parábola $y = 1 - x^2$.

Solução. Os vértices superiores têm a mesma altura. Se suas abscissas são u e v, então $1 - u^2 = 1 - v^2$, ou $u^2 = v^2$. Como são distintos, eles são simétricos: podemos escrevê-los como $(-x, 1 - x^2)$ e $(x, 1 - x^2)$, com $0 < x < 1$.

A base mede $2x$, a altura mede $1 - x^2$, e

$$A(x) = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3, \qquad A'(x) = 2 - 6x^2.$$

No domínio físico, $A'(x) = 0$ equivale a $x^2 = \frac{1}{3}$, logo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. A derivada é positiva antes desse ponto e negativa depois. A área tende a zero nas extremidades, correspondentes a retângulos degenerados. O máximo global é

$$A_{\max} = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

O retângulo procurado tem base $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e altura $\frac{2}{3}$.

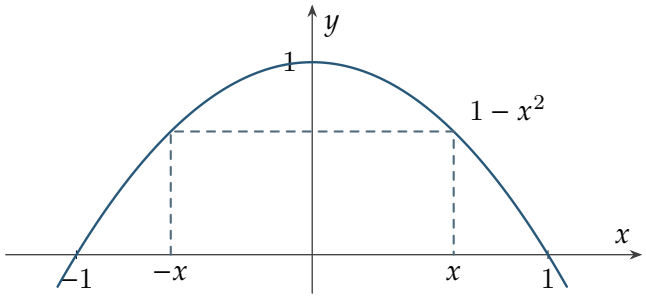


Figura 30: A base do retângulo mede $2x$, e sua altura é determinada pela parábola.

Exemplo 3.28.

Um cone circular reto é inscrito em uma esfera de raio R. Determine a altura do cone de maior volume.

Solução. Considere a seção que passa pelo eixo do cone e pelo centro da esfera. Seja h a altura medida do vértice do cone até o plano da base, e r o raio dessa base. O centro da esfera está a distância R do vértice. O triângulo retângulo formado pelo centro, pelo centro da base e por um ponto da borda tem catetos r, $|R-h|$ e hipotenusa R. Portanto

$$r^2 + (R-h)^2 = R^2, \qquad r^2 = R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2) = 2Rh - h^2.$$

Um cone não degenerado exige $0 < h < 2R$. Seu volume é

$$V(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3).$$

Derivando e fatorando,

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = \frac{\pi}{3} h(4R - 3h).$$

Como $h > 0$, o sinal é positivo para $h < \frac{4R}{3}$ e negativo para $h > \frac{4R}{3}$. Esse é o máximo global; nos extremos da extensão a $[0, 2R]$, o volume é zero. Logo a altura procurada é $\frac{4R}{3}$. Nesse caso, $r^2 = \frac{8R^2}{9}$, e o volume máximo é $\frac{32\pi R^3}{81}$.

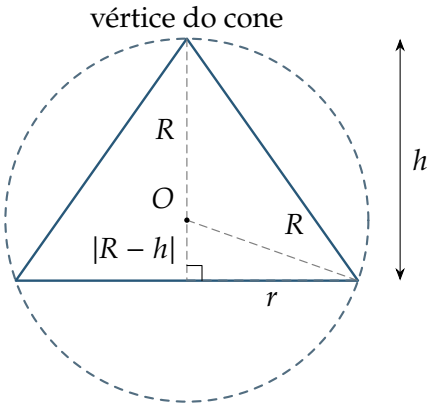


Figura 31: Seção axial: a relação entre r e h vem do triângulo retângulo indicado.

Exemplo 3.29.

Encontre a menor distância entre a reta $y = x - 2$ e a parábola $y = x^2 + 3x + 2$.

Solução. Para cada ponto $P = (x, x^2 + 3x + 2)$ da parábola, a menor distância à reta é a distância perpendicular. Pela fórmula de distância à reta $x - y - 2 = 0$,

$$D(x) = \frac{|x - (x^2 + 3x + 2) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-(x^2 + 2x + 4)|}{\sqrt{2}}.$$

Como $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$, podemos retirar o módulo:

$$D(x) = \frac{(x + 1)^2 + 3}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}},$$

com igualdade somente em $x = -1$. Portanto a distância mínima é $\frac{3}{\sqrt{2}}$, atingida no ponto $P = (-1, 0)$. Para obter o pé da perpendicular, usamos a inclinação -1, perpendicular à inclinação 1 da reta. A perpendicular que passa por P é

$$y - 0 = -(x + 1) \quad \Longrightarrow \quad y = -x - 1.$$

Na interseção com $y = x - 2$, temos $-x - 1 = x - 2$, logo $2x = 1$ e $x = 1/2$. A ordenada é $1/2 - 2 = -3/2$. Portanto, o pé da perpendicular é $Q = (1/2, -3/2)$, ponto da reta para o qual PQ realiza a distância mínima.

Por derivadas, obteríamos $D'(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{2}}$, negativa antes de -1 e positiva depois, confirmando o mínimo global. Completar o quadrado já fornece o valor mínimo e o caso de igualdade diretamente.

Exemplo 3.30.

Para $a, b > 0$, encontre o ponto de máximo de

$$F(x) = x^a(1 - x)^b, \qquad 0 < x < 1.$$

Solução. O logaritmo transforma o produto de potências em uma soma. Além disso, como $F(x) > 0$ em $(0, 1)$, F' e F'/F têm o mesmo sinal. Podemos, portanto, estudar os extremos derivando o logaritmo:

$$\ln F(x) = a \ln x + b \ln(1 - x), \qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{1 - x} = \frac{a - (a + b)x}{x(1 - x)}.$$

O denominador e $F(x)$ são positivos no domínio. Logo o sinal de F' é o de $a - (a + b)x$: positivo para $x < \frac{a}{a+b}$ e negativo para $x > \frac{a}{a+b}$. Como $a, b > 0$, esse ponto pertence a $(0, 1)$ e fornece o máximo global. Nas duas extremidades, $F(x) \to 0$. O valor máximo é

$$F\left(\frac{a}{a + b}\right) = \left(\frac{a}{a + b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a + b}\right)^b = \left(\frac{a}{a + b}\right)^a \left(\frac{b}{a + b}\right)^b.$$

3.6 Taxas relacionadas

Em problemas de taxas relacionadas, duas ou mais grandezas variam com o tempo. Uma equação entre elas, frequentemente obtida da geometria, permite relacionar suas taxas de variação pela regra da cadeia.

Exemplo 3.31.

Um balão esférico tem raio aumentando a $2\,\mathrm{cm/s}$. Qual é a taxa de variação do volume quando $r = 10\,\mathrm{cm}$?

Solução. O volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Como $r = r(t)$, a regra da cadeia fornece

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

No instante em que $r = 10\,\mathrm{cm}$ e $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\,\mathrm{cm/s}$,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 800\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}.$$

A taxa do raio é medida em $\mathrm{cm/s}$; a do volume, em cm^3/s.

Exemplo 3.32.

Uma escada de $5\,\mathrm{m}$ está apoiada em uma parede vertical. A base afasta-se da parede a $0{,}5\,\mathrm{m/s}$. Quando a base está a $3\,\mathrm{m}$ da parede, com que velocidade o topo desce?

Solução. As distâncias $x = x(t)$ e $y = y(t)$ variam com o tempo. Se x é a distância da base à parede e y a altura do topo, então

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Derivando em relação ao tempo,

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Quando $x = 3$, a altura positiva é $y = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Como $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}$, segue que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}\,\mathrm{m/s}.$$

O sinal negativo indica que a altura diminui. Portanto, o topo desce a $\frac{3}{8}\,\mathrm{m/s}$.

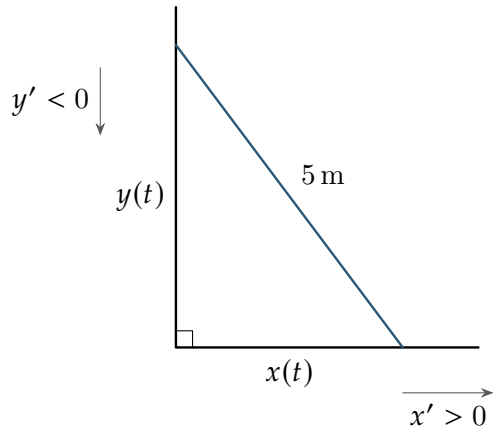


Figura 32: A escada mantém comprimento constante enquanto a base e o topo se deslocam.

Exemplo 3.33.

Um tanque cônico com vértice para baixo tem altura $12\,\mathrm{cm}$ e raio superior $4\,\mathrm{cm}$. Recebe água a $6\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. A que taxa sobe o nível quando a água tem altura $3\,\mathrm{cm}$?

Solução. Sejam $h = h(t)$ a altura da água e $r = r(t)$ o raio de sua superfície. A seção axial forma dois triângulos semelhantes, o da água e o do tanque inteiro. Logo

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \qquad r = \frac{h}{3}.$$

O volume depende de uma única variável após essa substituição:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{27}.$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi h^2}{9}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

No instante indicado, $6\pi = \frac{\pi \cdot 3^2}{9}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$, portanto $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 6\,\mathrm{cm/s}$. O sinal positivo indica que o nível sobe. A vazão constante não implica velocidade constante do nível, pois a área da superfície da água muda com a altura.

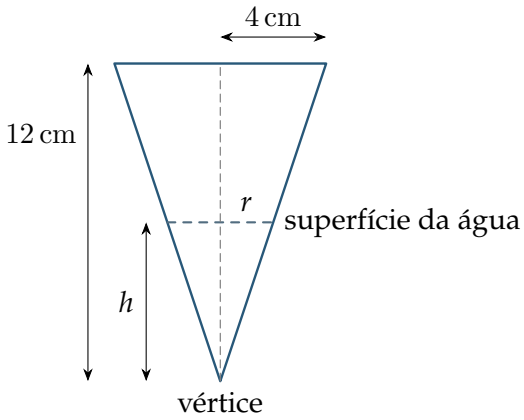


Figura 33: A semelhança na seção axial determina o raio da superfície da água.

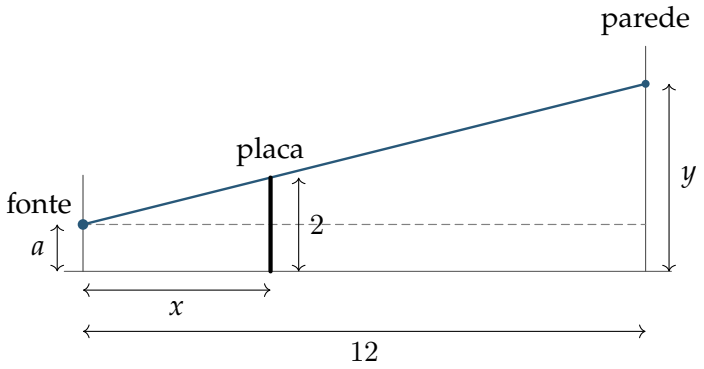
Quando várias medidas mudam ao mesmo tempo

Na escada, o comprimento permanece fixo. No cone, é a semelhança que liga o raio da água à altura. Nos próximos problemas, a primeira escolha é encontrar uma relação que continue verdadeira durante o movimento. Os dados de um instante entram na conta depois de derivar essa relação. Escreveremos $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ para a taxa de variação de x em relação ao tempo.

Exemplo 3.34. *Manter uma sombra imóvel.*

Uma fonte pontual pode subir ou descer por um suporte vertical a 12 m de uma parede. Entre o suporte e a parede, uma placa vertical de 2 m de altura desliza sobre o chão. Em certo instante, a fonte está a 1 m do chão e a placa está a 4 m do suporte, afastando-se dele a $0{,}5$ m/s. Se a fonte ficar parada, a que taxa se moverá o topo da sombra na parede? Com que velocidade vertical se deve mover a fonte para que esse topo fique instantaneamente parado?

Solução. Sejam a a altura da fonte, x a distância da placa ao suporte e y a altura da sombra na parede. O raio que passa pelo topo da placa determina o topo da sombra. O raio faz o mesmo ângulo com a horizontal nos dois triângulos da figura. As alturas dos triângulos, medidas a partir da horizontal da fonte, são $2 - a$ e $y - a$.



Para $0 < x < 12$ e $a < 2$, a semelhança dá

$$\frac{2-a}{x} = \frac{y-a}{12}, \qquad x(y-a) = 12(2-a).$$

No instante indicado, $4(y-1) = 12$, portanto $y = 4$ m. Derivamos a identidade que vale durante o movimento, deixando tanto x quanto a variar. Obtemos

$$x'(y-a) + x(y'-a') = -12a', \qquad xy' = -(12-x)a' - (y-a)x'.$$

Com a fonte parada, $a' = 0$. Segue que $4y' = -3 \cdot (1/2)$, ou seja, o topo da sombra desce a $3/8$ m/s. Para mantê-lo parado, a condição é $y' = 0$. Logo,

$$0 = -8a' - \frac{3}{2}, \qquad a' = -\frac{3}{16}\ \mathrm{m/s}.$$

A fonte deve descer. Ao baixá-la, inclinamos mais o raio que passa pelo topo da placa, compensando a descida da sombra causada pelo afastamento da placa.

Exemplo 3.35. *Menos sal no tanque, maior concentração.*

Um tanque contém 150 L de solução com 8 g de sal por litro. Entram 3 L/min de outra solução, com 14 g/L, e saem 8 L/min da mistura. A agitação mantém a concentração uniforme e não há evaporação. Nesse instante, a massa de sal e a concentração estão aumentando ou diminuindo? Calcule as duas taxas.

Solução. Denotemos por V o volume em litros, por M a massa de sal em gramas e por $C = M/V$ a concentração em g/L. A diferença entre as vazões dá $V' = 3 - 8 = -5$ L/min. Para o sal, cada vazão precisa ser multiplicada pela concentração da corrente correspondente. A solução que sai tem a concentração do tanque naquele instante. Portanto,

$$M' = 3 \cdot 14 - 8 \cdot 8 = 42 - 64 = -22\ \mathrm{g/min}.$$

Para descobrir o que ocorre com C, usamos $M = CV$. Pela regra do produto,

$$M' = C'V + CV', \qquad -22 = 150C' + 8(-5).$$

Logo $150C' = 18$ e $C' = 3/25 = 0{,}12$ $(\mathrm{g/L})/\mathrm{min}$. A massa de sal diminui, mas a concentração aumenta. Podemos entender os 18 g/min sem repetir a derivação. Se entrassem 3 litros por minuto com a concentração do próprio tanque, eles trariam 24 g/min de sal. Trazem 42. Esse excesso se distribui pelos 150 litros presentes naquele instante.

Exemplo 3.36. *Um cabo recolhido a velocidade constante.*

Um guincho puxa um barco em direção a um cais. O trecho livre do cabo permanece retilíneo e esticado. A guia fixa está 3 m acima do ponto de amarração do barco, que se mantém à mesma altura. O guincho encurta o trecho livre a 2 m/s constantes. Quando o barco está a 4 m da vertical da guia, determine sua velocidade e sua aceleração horizontais.

Solução. Tomemos $x > 0$ como a distância horizontal à vertical da guia, positiva no sentido de afastamento do cais. O comprimento livre ℓ é a hipotenusa de um triângulo de catetos x e 3. Assim,

$$\ell^2 = x^2 + 9, \qquad \ell\ell' = xx'.$$

Quando $x = 4$, temos $\ell = 5$. Como o cabo encurta, $\ell' = -2$ m/s. Então $x' = 5(-2)/4 = -5/2$ m/s. O barco se aproxima do cais com rapidez de $2{,}5$ m/s.

Para obter a aceleração, voltamos à igualdade $\ell\ell' = xx'$, válida também antes e depois desse instante. Derivando os dois produtos,

$$(\ell')^2 + \ell\ell'' = (x')^2 + xx''.$$

A velocidade de recolhimento é constante, de modo que $\ell'' = 0$. Substituindo os dados,

$$x'' = \frac{(-2)^2 - (-5/2)^2}{4} = \frac{4 - 25/4}{4} = -\frac{9}{16}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Tanto a velocidade quanto a aceleração apontam para o cais. Por isso a rapidez do barco está aumentando. À medida que o cabo fica mais inclinado, é preciso um deslocamento horizontal maior para encurtá-lo da mesma quantidade.

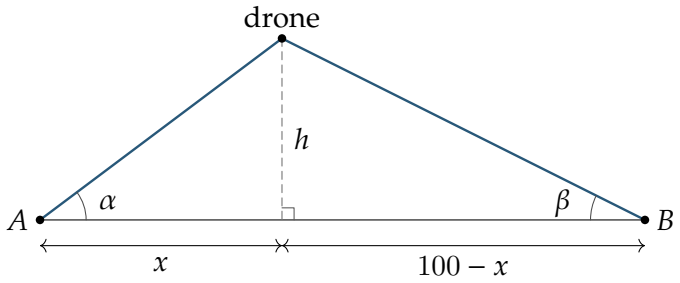
Exemplo 3.37. *Localizar um drone com duas leituras angulares.*

Dois observadores, A e B, estão no mesmo nível e distam 100 m um do outro. Um drone se move no plano vertical que contém os observadores, e sua projeção no solo permanece entre eles. Sejam α e β os ângulos de elevação medidos, respectivamente, em A e em B. Em um mesmo instante, registram-se

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \qquad \alpha' = -\frac{4}{125}\ \mathrm{rad/s}, \qquad \beta' = \frac{1}{25}\ \mathrm{rad/s}.$$

Determine as componentes horizontal e vertical da velocidade do drone e sua rapidez.

Solução. Meçamos a coordenada horizontal x a partir de A, no sentido de B, e a altura h para cima. O observador A vê o drone a uma distância horizontal x, enquanto para B essa distância é $100 - x$.



A altura é a mesma nas duas visadas. Em qualquer instante,

$$h = x\,\mathrm{tg}\,\alpha = (100 - x)\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

No instante da leitura, $3x/4 = (100 - x)/2$. Daí $3x = 200 - 2x$, $x = 40$ m e $h = 30$ m. Guardamos esses valores e derivamos as duas expressões de h. Como os ângulos são medidos em radianos, temos

$$h' = x'\,\mathrm{tg}\,\alpha + x\,\sec^2\alpha\,\alpha', \qquad h' = -x'\,\mathrm{tg}\,\beta + (100 - x)\,\sec^2\beta\,\beta'.$$

O sinal negativo na segunda equação vem de $(100 - x)' = -x'$. Usando $\sec^2\theta = 1 + \mathrm{tg}^2\,\theta$, encontramos $\sec^2\alpha = 25/16$ e $\sec^2\beta = 5/4$. As equações ficam

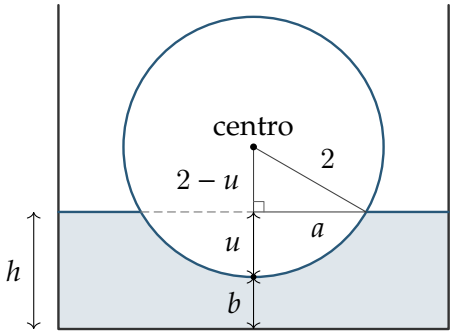
$$h' = \frac{3}{4}x' + 40 \cdot \frac{25}{16}\left(-\frac{4}{125}\right) = \frac{3}{4}x' - 2,$$
$$h' = -\frac{1}{2}x' + 60 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{25} = -\frac{1}{2}x' + 3.$$

Igualando os membros da direita, obtemos $(5/4)x' = 5$. Portanto $x' = 4$ m/s no sentido de B e $h' = 1$ m/s para cima. A rapidez é $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ m/s. Embora o drone esteja subindo, α diminui. Para o observador em A, o afastamento horizontal é suficiente para reduzir o ângulo de elevação.

Exemplo 3.38. *A água sobe enquanto a esfera desce.*

Uma esfera rígida de raio 2 cm é mergulhada verticalmente em um recipiente cilíndrico de raio interno 3 cm. O recipiente contém água, e a esfera desce a 3 cm/s. A água se mantém nivelada, sem transbordar. No instante em que o ponto mais baixo da esfera está 1 cm abaixo da superfície, a que taxa sobe a água? A que taxa cresce o raio do círculo em que a esfera corta a superfície? A esfera permanece parcialmente imersa e não toca o fundo. Pode-se usar a fórmula $V_{\text{calota}} = \pi u^2(R - u/3)$ para a calota de altura u de uma esfera de raio R.

Solução. Meçamos todas as alturas a partir do fundo. Sejam h a altura da água e b a do ponto mais baixo da esfera. A parte submersa é uma calota de altura $u = h - b$. Como $b' = -3$, sua altura varia à taxa $u' = h' + 3$. A descida da esfera e a subida da superfície da água contribuem para o crescimento da calota.



O cilindro abaixo do nível h tem volume $9\pi h$. Uma parte desse espaço está ocupada pela esfera. O volume de água permanece constante e vale

$$V_{\text{água}} = 9\pi h - \pi\left(2u^2 - \frac{u^3}{3}\right).$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos $0 = 9\pi h' - \pi(4u - u^2)u'$. Tomamos agora $u = 1$, a profundidade de imersão dada no enunciado. Então

$$9h' = 3u' = 3(h' + 3), \qquad 6h' = 9.$$

A água sobe a $h' = 3/2$ cm/s e a altura da calota cresce a $u' = 9/2$ cm/s.

Para encontrar o raio a do círculo na superfície, usemos a seção vertical da figura. O centro da esfera está a 2 cm de seu ponto mais baixo. Na configuração dada, o nível da água passa $2 - u$ centímetros abaixo do centro. Pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 + (2 - u)^2 = 4, \qquad a^2 = 4u - u^2.$$

Em particular, $a = \sqrt{3}$ cm quando $u = 1$. Derivando a relação antes de substituir os valores, temos $2aa' = (4 - 2u)u'$. Assim,

$$a' = \frac{(4 - 2) \cdot (9/2)}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm/s}.$$

O sinal positivo corresponde à parte inferior da esfera, que se alarga à medida que o nível se aproxima do centro. A área desse círculo, $\pi a^2 = \pi(4u - u^2)$, é justamente o fator que multiplicou u' na taxa de variação do volume da calota.

4.3 Como escolher uma técnica de integração

Escolher uma técnica é reconhecer uma regra de derivação lida ao contrário. Antes de iniciar uma conta, convém simplificar o integrando: desenvolver ou fatorar somente quando isso revelar uma estrutura, usar identidades trigonométricas, completar quadrados e, em frações racionais impróprias, fazer a divisão polinomial. Em seguida, procure uma das situações abaixo.

- Uma expressão interna acompanhada de sua derivada, possivelmente por um fator constante, indica **substituição**. Por exemplo, $2xe^{x^2}$ contém a derivada de x^2.
- Um produto em que um fator se simplifica ao derivar e o outro se integra facilmente indica **integração por partes**. Produtos de polinômios por exponenciais, senos ou cossenos são casos típicos.
- Potências de funções trigonométricas pedem identidades e a separação de um diferencial conveniente. Uma expressão racional em $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ admite a substituição $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

- Uma expressão racional em x pede divisão polinomial, se necessário, e **frações parciais**. Raízes dos tipos $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ e $x^2 - a^2$ sugerem **substituição trigonométrica**.
- Se há intervalo infinito ou assíntota vertical, a integral é **imprópria**: primeiro ela deve ser reescrita como limite; só depois se calcula ou se aplica um critério de convergência.

Nenhuma regra substitui a verificação final. Depois de obter uma primitiva, derive-a; em uma integral definida, confira também os limites e o sinal esperado. Essa checagem curta detecta constantes, sinais e fatores esquecidos.

4.4 Método da substituição

Teorema 4.8. *Substituição.*

Se $u = g(x)$, com g continuamente diferenciável, e f é contínua no intervalo percorrido por g, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u.$$

Para integrais definidas,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Demonstração. O integrando $f(g(x))g'(x)$ tem a forma produzida pela regra da cadeia. Procuramos, portanto, uma primitiva composta $F(g(x))$, em que $F' = f$. A continuidade de f garante a existência de F pelo Teorema Fundamental.

Se F é uma primitiva de f, então, pela regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = f(g(x))g'(x).$$

Assim, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$. Para a versão definida,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado na variável u,

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Se $g(a) > g(b)$, a integral na variável u usa limites invertidos; se forem iguais, vale zero. A prova depende da regra da cadeia e dos valores nos extremos, sem exigir que g seja monótona. □

O método da substituição é a regra da cadeia lida de trás para frente. Ele é útil quando a integral contém uma expressão interna $g(x)$ e, ao lado dela, aparece a derivada $g'(x)$,

talvez multiplicada por uma constante. Nessa situação, escrevemos $u = g(x)$, calculamos $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ e trocamos todo o integrando para a variável u.

Em integrais indefinidas, depois de integrar em u, voltamos para a variável original. Em integrais definidas, podemos trocar também os limites: quando $x = a$, temos $u = g(a)$; quando $x = b$, temos $u = g(b)$. Assim evitamos voltar para x antes de avaliar os extremos.

Exemplo 4.21.

Calcule $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução. O argumento da exponencial é x^2. Como a derivada de x^2 é $2x$, a integral já contém exatamente o fator necessário para uma substituição. Tome

$$u = x^2.$$

Então

$$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Substituindo a expressão interna e seu diferencial, obtemos

$$\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^u \mathrm{d}u.$$

Agora integramos na variável u:

$$\int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$$

Voltando a $u = x^2$,

$$\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{x^2} + C.$$

Exemplo 4.22.

Calcule $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

Solução. O denominador tem derivada igual ao numerador. Tome $u = 1 + x^3$, de modo que $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Em cada intervalo que não contenha $x = -1$,

$$\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|1+x^3| + C.$$

A exclusão de $x = -1$ vem do denominador original, e corresponde a $u \neq 0$.

Exemplo 4.23.

Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Tomamos $u = 1 + x^2$, cujo diferencial é $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Quando $x = 0$, $u = 1$; quando $x = 1$, $u = 2$. Assim,

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Como $u > 0$ nesse intervalo, não é necessário módulo no logaritmo.

Exemplo 4.24.

Calcule $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução. A expressão sob a raiz tem derivada proporcional ao fator x. Para $-1 < x < 1$, tome $u = 1 - x^2$. Então $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$, isto é, $x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/2$. Logo,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

A expressão obtida estende-se continuamente aos extremos $x = \pm 1$; a igualdade de derivadas foi usada no interior.

Exemplo 4.25. *A substituição transforma todo o integrando.*

Calcule $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Solução. A raiz sugere $u = x + 1$. Além de $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, precisamos escrever o fator que está fora da raiz na nova variável: $x = u - 1$. Para $x > -1$, temos $u > 0$, e

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int (u-1)u^{1/2}\mathrm{d}u \\ &= \int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Voltando para x, obtemos

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

A derivada confirma o resultado:

$$(x+1)^{3/2} - (x+1)^{1/2} = \sqrt{x+1}\big((x+1)-1\big) = x\sqrt{x+1}.$$

A expressão obtida estende-se continuamente a $x = -1$. Manter x ao lado de uma integral em u deixaria a mudança de variável incompleta; aqui, a relação $x = u - 1$ resolve essa dificuldade.

Exemplo 4.26.

Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Solução. O domínio do integrando é $x > 0$. O argumento do seno é $\sqrt{x}$, cuja derivada, $1/(2\sqrt{x})$, é proporcional ao fator $1/\sqrt{x}$ que acompanha o seno. Essa correspondência orienta a substituição. Tome $u = \sqrt{x}$; então $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$, logo $\mathrm{d}x/\sqrt{x} = 2\mathrm{d}u$. Portanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

Exemplo 4.27.

Calcule $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,\mathrm{d}x$.

Solução. A função interna e^x tem derivada igual ao fator que acompanha o seno. Com $u = e^x$ e $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$,

$$\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C = -\cos(e^x) + C.$$

A substituição e o resultado valem para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.28.

Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Escrevemos $x^4 = (x^2)^2$. Assim, $u = x^2$ transforma o denominador em $1+u^2$, e $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ fornece $x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C.\end{aligned}$$

O resultado vale em toda a reta: sua derivada é $\frac{1}{2}\frac{2x}{1+(x^2)^2} = x/(1+x^4)$, inclusive em zero.

Exemplo 4.29.

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$.

Solução. A raiz está no denominador, de modo que $1+\ln x > 0$. Logo, o domínio é $x > e^{-1}$. Tome $u = 1+\ln x$; então $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ e $u > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x &= \int u^{-1/2}\mathrm{d}u = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{1+\ln x} + C.\end{aligned}$$

Exemplo 4.30.

Calcule $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Tome $u = 4+x^2$, com $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Os extremos $x = 0$ e $x = 2$ passam a $u = 4$ e $u = 8$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_4^8 u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_4^8 \\ &= \frac{1}{3}\left(8^{3/2} - 4^{3/2}\right).\end{aligned}$$

Como $8^{3/2} = 8\sqrt{8} = 16\sqrt{2}$ e $4^{3/2} = 8$, o resultado é $(16\sqrt{2}-8)/3$.

Exemplo 4.31.

Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Com $u = \operatorname{sen} x$, temos $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$. Logo,

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C.$$

Na versão definida em $[0,\pi]$, os extremos dão $u = 0$ e $u = 0$. Pela fórmula de substituição,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^0 \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = 0.$$

Não há contradição: o integrando é positivo antes de $\pi/2$ e negativo depois. A fórmula baseada na regra da cadeia não exige que $u = \operatorname{sen} x$ seja injetiva em todo o intervalo.

Contraexemplo: uma substituição pode esconder uma troca de sinal

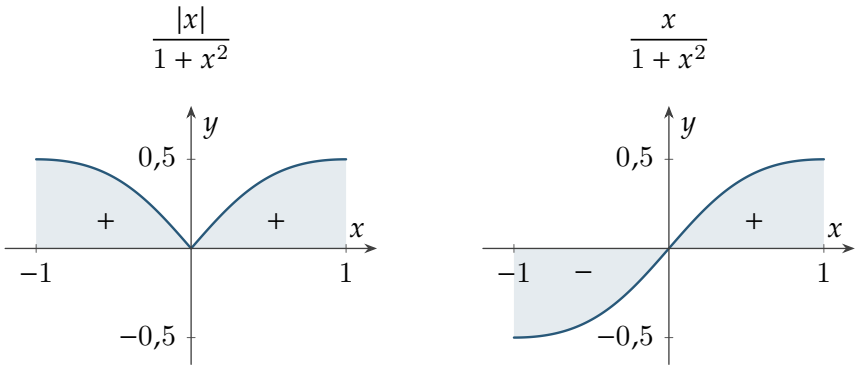
Considere

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

O denominador sugere $u = 1 + x^2$, com $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Os dois extremos dão $u = 2$. Concluir $I = \frac{1}{2}\int_2^2 \mathrm{d}u/u = 0$, porém, usaria indevidamente $|x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$ no lado negativo. A identidade correta depende do sinal de x.

Separamos o intervalo em zero. Para $x < 0$, $|x| = -x$, e $|x|\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/2$. Quando x vai de -1 a 0, u vai de 2 a 1. Para $x > 0$, $|x| = x$, e $|x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$; agora u vai de 1 a 2. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} \frac{-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_2^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= -\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \ln 2. \end{aligned}$$



Com $|x|$, as duas contribuições são positivas. Com x, elas têm sinais opostos.

Para comparar, a substituição na integral sem módulo é válida de uma só vez:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} = 0.$$

Aqui, $x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$ vale dos dois lados. A fórmula de substituição não exige, em geral, injetividade; o erro anterior foi substituir $|x|$ por x. Ao isolar x a partir de $u = 1 + x^2$, a mesma dificuldade aparece como a escolha entre $x = -\sqrt{u-1}$ e $x = \sqrt{u-1}$.

Exemplo 4.32. *Uma soma calculada por substituição.*

Calcule $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{m}{m^2+4i^2}$.

Solução. Retomamos a identificação usada no Exemplo 4.7. Dividindo numerador e denominador de cada parcela por m^2,

$$\frac{m}{m^2+4i^2} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{1+4(i/m)^2}.$$

Assim, $\Delta x = 1/m$, $x_i = i/m$ e $f(x) = 1/(1+4x^2)$ em $[0,1]$. Como f é contínua,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{m}{m^2+4i^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Para calcular a integral, tomamos $u = 2x$, logo $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$. Os limites $x = 0$ e $x = 1$ tornam-se $u = 0$ e $u = 2$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} u\right]_0^2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2.$$

Reconhecer a soma fornece a integral; escolher a substituição permite calculá-la. Não precisamos encontrar uma fórmula fechada para a soma finita.

5.2 Volume de sólidos

5.2.1 Volume por seções transversais

Imagine uma rampa maciça com 2 m de comprimento e 2 m de largura. De uma ponta à outra, a altura cresce em linha reta de zero a 2 m. Medindo x em metros a partir da ponta mais baixa, a altura na posição x é o próprio x. Se serrássemos a rampa nessa posição, perpendicularmente ao comprimento, a face exposta seria um retângulo de largura 2 e altura x. Esse retângulo é a *seção transversal* da rampa em x. Sua área, em metros quadrados, é $A(x) = 2x$.

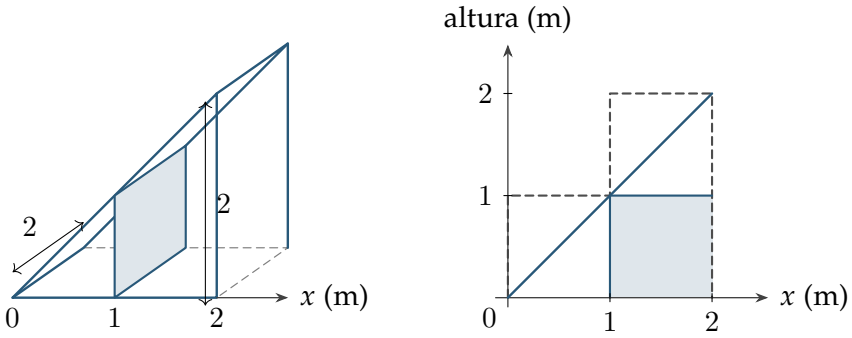


Figura 67: À esquerda, o corte em $x = 1$ expõe um retângulo de área $2\,\mathrm{m}^2$. À direita, vemos a rampa de perfil. Em cada metade, a altura da borda esquerda dá um bloco que cabe na rampa. A altura da borda direita dá um bloco que a cobre.

Façamos primeiro um único corte em $x = 1$. Cada metade tem 1 m de espessura. Na primeira, a área dos cortes cresce de 0 a 2 e, na segunda, de 2 a 4. Se usarmos a menor área de cada metade, os dois blocos somam $0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2\,\mathrm{m}^3$. Com a maior área de cada metade, somam $2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6\,\mathrm{m}^3$. O volume da rampa fica entre esses dois valores.

Agora faça cortes a cada meio metro. As áreas nos extremos são $0, 1, 2, 3, 4$, em metros quadrados. O volume dos blocos menores passa a ser $(0 + 1 + 2 + 3)/2 = 3\,\mathrm{m}^3$, e o dos maiores, $(1 + 2 + 3 + 4)/2 = 5\,\mathrm{m}^3$. Para qualquer espessura comum Δx, cada área intermediária aparece uma vez em cada soma. Ao subtrair os dois totais, sobra apenas $\big(A(2) - A(0)\big)\Delta x = 4\Delta x$. Podemos fazer essa diferença tão pequena quanto quisermos. O valor para o qual as duas somas tendem é

$$V = \int_0^2 2x \, \mathrm{d}x = \big[x^2\big]_0^2 = 4\,\mathrm{m}^3.$$

A geometria confirma a conta. O perfil triangular da rampa tem área $2 \cdot 2/2 = 2\,\mathrm{m}^2$ e se mantém ao longo dos 2 m de largura.

Do corte à integral

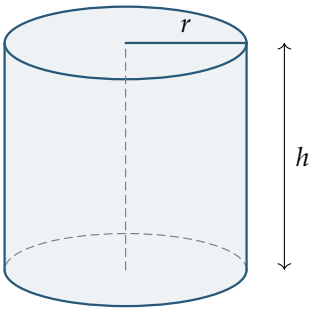
O corte tem área. Para obter volume, precisamos também da espessura da fatia. Em um sólido que se estende de $x = a$ a $x = b$, marque as posições $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A fatia entre x_{i-1} e x_i tem espessura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Escolha uma posição c_i nessa fatia e use a área $A(c_i)$ como base de um prisma de mesma espessura. Seu volume é $A(c_i)\Delta x_i$.

Quando a área $A(x)$ dos cortes varia continuamente, a soma desses volumes se aproxima do volume do sólido à medida que a maior espessura, $\|P\| = \max_i \Delta x_i$, tende a zero. Obtemos

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Os limites a e b indicam onde começam e terminam os cortes nessa direção. Se for mais fácil descrever o sólido por cortes horizontais, fixamos a altura y, encontramos $A(y)$ e integramos entre os níveis inferior e superior. Nos dois casos, área vezes espessura tem unidade de volume.

Quando o enunciado dá curvas, desenhe as fronteiras e marque os pontos em que se encontram. Passe um segmento pela região como se passasse a serra pela rampa. Ao fixar x, leia no eixo vertical as duas alturas que delimitam o segmento. A diferença entre elas é um comprimento. O enunciado diz o que fazer com ele. Se for o lado de um quadrado, eleva-se esse comprimento ao quadrado para obter a área. Se houver rotação, é preciso ver que figura o segmento desenha ao dar uma volta em torno do eixo.



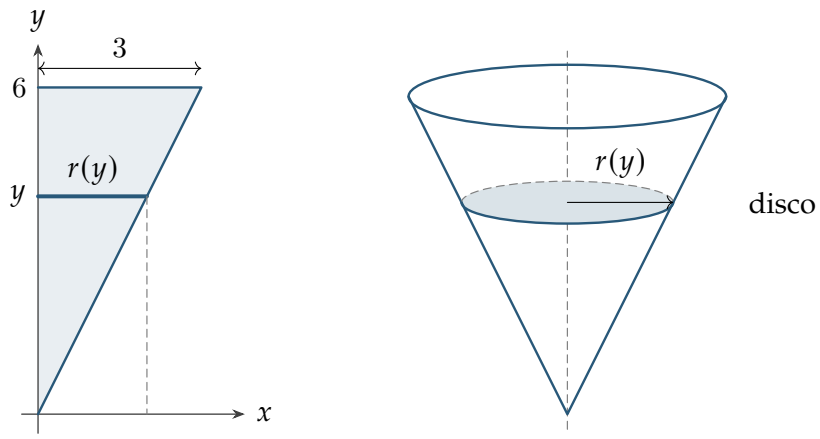
$A_{\text{base}} = \pi r^2$

Figura 68: O volume de um cilindro é área da base vezes altura. Nas aproximações por fatias, essa altura é uma pequena espessura.

Exemplo 5.5. *Construindo o volume de um cone.*

Um cone circular reto tem altura $6\,\mathrm{m}$ e raio da base $3\,\mathrm{m}$. Determine seu volume por integração, sem usar a fórmula do volume do cone.

Solução. Colocamos o vértice no nível $y = 0$ e a base no nível $y = 6$, medindo as coordenadas em metros. Um corte horizontal, à altura y, é um disco. Seu raio começa em zero e aumenta até 3, mas precisamos determinar como ele varia.



Corte que contém o eixo Vista esquemática do cone

Figura 69: No corte que contém o eixo, a semelhança de triângulos determina o raio. Ao girar o segmento horizontal, obtemos o disco da seção.

Pela semelhança entre o triângulo menor e o triângulo de altura 6 e base 3,

$$\frac{r(y)}{y} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r(y) = \frac{y}{2} \qquad (0 < y \leqslant 6).$$

A mesma expressão dá $r(0) = 0$. Assim, a área do corte é

$$A(y) = \pi r(y)^2 = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} y^2.$$

Uma fatia de espessura Δy tem volume aproximado $A(y)\Delta y$. Como os cortes percorrem os níveis de 0 a 6,

$$V = \int_0^6 A(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\int_0^6 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6 = \frac{\pi}{12}(216 - 0) = \boxed{18\pi\ \mathrm{m}^3}.$$

O raio depende da posição da fatia; usar o raio 3 em todos os cortes calcularia o cilindro que contém o cone. De fato, esse cilindro tem volume $\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi\ \mathrm{m}^3$, maior que o volume encontrado.

Para altura $H > 0$ e raio da base $R > 0$, o mesmo argumento fornece $r(y) = Ry/H$. Portanto,

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} y\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

A fórmula conhecida surge da soma das áreas dos cortes; o fator $1/3$ é consequência dessa variação quadrática.

5.2.2 Método dos discos e dos anéis

Para descrever um sólido de revolução, comece pela região preenchida no plano. Se ela está sob o gráfico de uma função contínua $f(x) \geqslant 0$, de $x = a$ a $x = b$, o segmento vertical na posição x vai do eixo x até $y = f(x)$. Ao girar em torno desse eixo, o extremo superior desenha uma circunferência de raio $f(x)$. Cada ponto entre o eixo e o extremo também descreve uma circunferência, com um raio entre 0 e $f(x)$. Juntas, elas preenchem um disco. Aumentar x desloca esse disco ao longo do eixo. Assim,

$$A(x) = \pi[f(x)]^2, \qquad V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Se o segmento inteiro está de um só lado do eixo e separado dele, o ponto mais próximo descreve uma circunferência de raio $r(x) > 0$, e o mais distante, outra de raio $R(x)$. Nenhum ponto preenche o centro. Sobra um *anel*, também chamado de coroa circular ou arruela. Subtraindo as áreas dos dois discos, obtemos

$$A(x) = \pi R(x)^2 - \pi r(x)^2, \qquad V = \pi \int_a^b \left[R(x)^2 - r(x)^2\right] \mathrm{d}x.$$

Para medir esses raios num desenho, marque primeiro a reta de rotação. Por exemplo, a distância de um ponto de ordenada y à reta $y = c$ é $|y - c|$. Se o segmento toca ou atravessa essa reta, o menor raio é zero. O maior continua sendo a distância até o extremo mais afastado.

Exemplo 5.6.

Calcule o volume gerado pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$, em torno do eixo x.

Solução. A faixa vertical tem altura $\sqrt{x}$. Ao girar em torno do eixo x, ela gera uma fatia cujo corte é um disco de raio $R(x) = \sqrt{x}$.

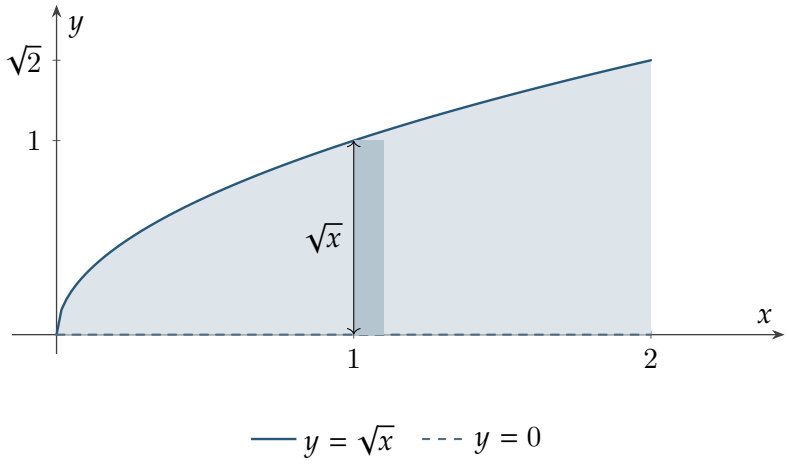
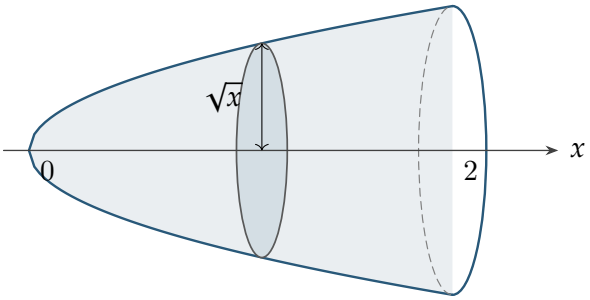


Figura 70: A faixa destacada fornece o raio do disco e sua espessura.

Portanto,

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{4}{2} - 0 \right) = 2\pi.$$

O resultado é dado em unidades cúbicas. O sólido é gerado pela região; a rotação apenas da curva descreve sua superfície lateral.

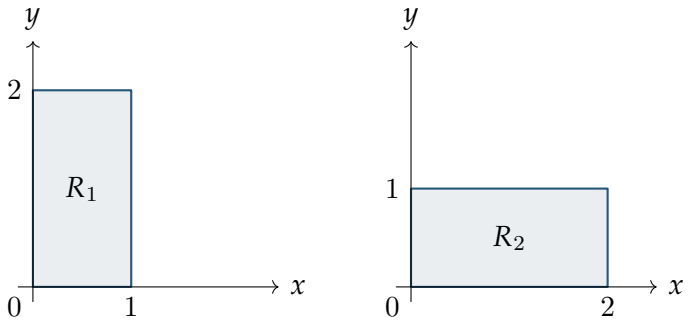


seção circular de raio $\sqrt{x}$

Figura 71: Vista esquemática do sólido obtido pela rotação da região sob $y = \sqrt{x}$.

Contraexemplo: áreas iguais podem gerar volumes diferentes

Considere os retângulos $R_1 = [0, 1] \times [0, 2]$ e $R_2 = [0, 2] \times [0, 1]$. Ambos têm área 2, mas ocupam distâncias diferentes do eixo x.



Ao girar R_1 em torno desse eixo, obtemos discos de raio 2, distribuídos por um comprimento 1. Para R_2, o raio é 1, e o comprimento é 2. Logo,

$$V_1 = \pi \int_0^1 2^2 \, dx = 4\pi, \qquad V_2 = \pi \int_0^2 1^2 \, dx = 2\pi.$$

No cálculo da área plana, a altura entra na primeira potência; na área do disco, o raio entra ao quadrado. Por isso, conservar a área da região não conserva necessariamente o volume de revolução. É preciso identificar os raios de cada seção, mesmo quando a área plana já é conhecida.

Exemplo 5.7. *O raio de cada corte de uma esfera.*

Determine, por integração, o volume da esfera de raio $a > 0$.

Solução. Representamos a esfera com centro na origem e fazemos cortes perpendiculares ao eixo x. A faixa de posições vai de $-a$ a a. O raio a é o da esfera; o raio do disco obtido em uma posição x será denotado por $\rho(x)$.

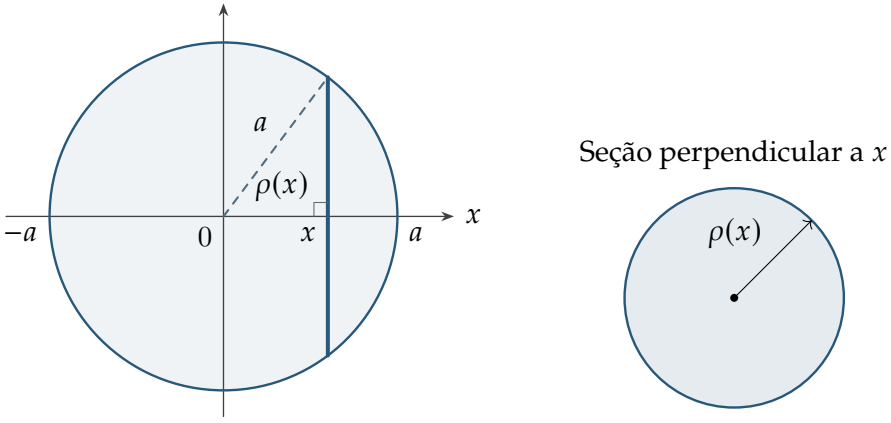


Figura 72: O triângulo retângulo no corte central relaciona a posição x, o raio $\rho(x)$ da seção e o raio a da esfera.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + \rho(x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad \rho(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Assim, $A(x) = \pi\rho(x)^2 = \pi(a^2 - x^2)$. A raiz desaparece quando calculamos a área do disco. Logo,

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

A duplicação da integral usa a simetria dos cortes em x e $-x$. No centro, $\rho(0) = a$; nas extremidades, $\rho(\pm a) = 0$. Esses valores conferem a expressão geométrica antes da integração.

Exemplo 5.8. *Discos horizontais e integração em y.*

A região $0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant y^2$, gira em torno do eixo y. Calcule o volume do sólido gerado.

Solução. O eixo de rotação é vertical. Para obter discos, cortamos perpendicularmente a ele: usamos faixas horizontais. Em cada nível y, a faixa começa no eixo $x = 0$ e termina na curva $x = y^2$. A distância entre esses pontos é o raio do disco:

$$R(y) = y^2 - 0 = y^2, \qquad A(y) = \pi(y^2)^2 = \pi y^4.$$

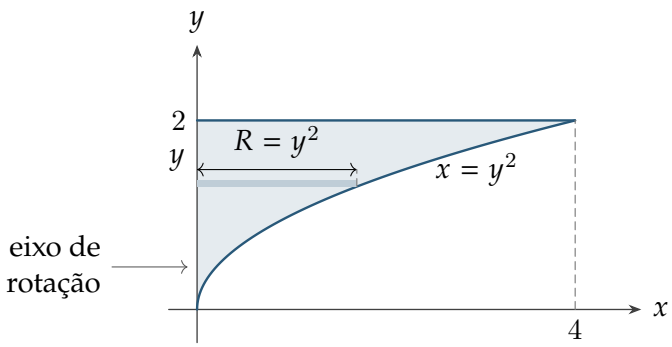


Figura 73: A faixa horizontal toca o eixo de rotação. Por isso, sua rotação preenche um disco, sem uma parte central vazia.

A espessura está na direção vertical, portanto integramos em y, de 0 a 2:

$$V = \pi \int_0^2 y^4 \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{32}{5} - 0\right) = \boxed{\frac{32\pi}{5}}.$$

Os valores 0 e 4 são os extremos horizontais da região e não servem como limites dessa integral em y. O cilindro de raio 4 e altura 2 contém o sólido e tem volume 32π, coerentemente maior que o resultado.

Exemplo 5.9. *A mesma região, dois eixos de rotação.*

A região limitada por $y = x^2$ e $y = x$ gira, separadamente, em torno das retas $y = 0$ e $y = -1$. Determine os dois volumes.

Solução. As interseções satisfazem $x^2 = x$, isto é, $x(x - 1) = 0$; logo, ocorrem em $x = 0$ e $x = 1$. Nesse intervalo, $x - x^2 = x(1 - x) \geqslant 0$. Portanto, cada faixa vertical vai da altura x^2 até a altura x.

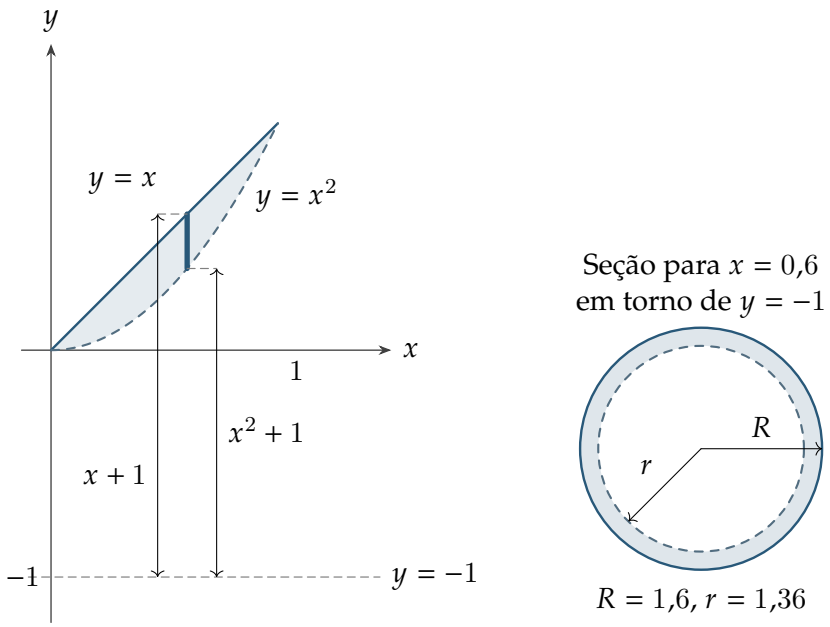


Figura 74: A região é a mesma nos dois casos. O eixo deslocado muda as distâncias que definem os raios, embora não altere o comprimento da faixa.

Rotação em torno de $y = 0$. A faixa está acima do eixo e não o toca quando $0 < x < 1$. Sua rotação deixa uma parte central vazia. Os raios externo e interno são, respectivamente,

$$R(x) = x, \qquad r(x) = x^2.$$

A seção é um anel: retiramos do disco de raio x o disco de raio x^2. Assim,

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi \int_0^1 \left(x^2 - (x^2)^2\right) \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{15}}. \end{aligned}$$

Rotação em torno de $y = -1$. Medimos novamente os raios, agora a partir da reta $y = -1$:

$$R(x) = x - (-1) = x + 1, \qquad r(x) = x^2 - (-1) = x^2 + 1.$$

Os dois raios aumentaram em uma unidade. Consequentemente,

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \pi \int_0^1 \left[(x+1)^2 - (x^2+1)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 \left[(x^2 + 2x + 1) - (x^4 + 2x^2 + 1)\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{15}}. \end{aligned}$$

Embora a espessura radial do anel continue sendo $R - r = x - x^2$, sua área mudou. De fato,

$$\pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r),$$

e o fator $R + r$ é maior quando afastamos o eixo da região. Essa identidade explica por que integrar $\pi(R - r)^2$ não calcula o volume desejado.

Exemplo 5.10.

Calcule o volume gerado pela rotação da região limitada por $y = x^2$ e $y = x$, em torno da reta $y = 1$.

Solução. As interseções satisfazem $x^2 = x$, ou $x(x - 1) = 0$, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Nesse intervalo, $x^2 \leqslant x \leqslant 1$. A reta de rotação está acima da região: a curva mais baixa está mais distante do eixo.

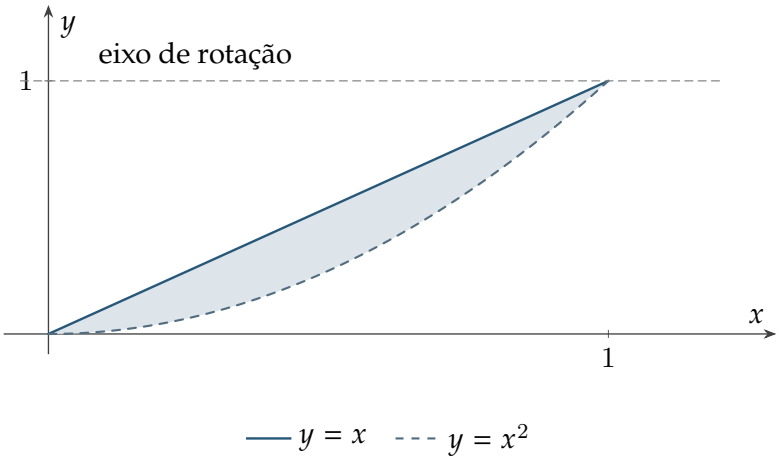


Figura 75: A região está entre $y = x^2$ e $y = x$, abaixo do eixo de rotação $y = 1$.

Na mesma abscissa x, o raio externo é $R(x) = 1 - x^2$, e o interno é $r(x) = 1 - x$. Ambos são não negativos e $R(x) \geqslant r(x)$.

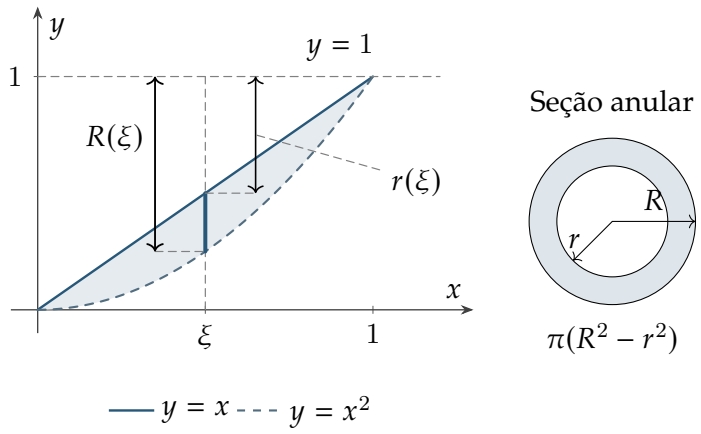


Figura 76: Os dois raios são medidos na mesma seção $x = \xi$. À direita, o anel mostra o disco interno excluído do volume.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \left[(1-x^2)^2 - (1-x)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 \left[(1-2x^2+x^4) - (1-2x+x^2)\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x)\, \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + 1\right) = \frac{\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Subtrair primeiro as alturas e depois elevar ao quadrado daria a área de outro disco, não a do anel.

Capítulo 6

Polinômios de Taylor e estimativas de erro

Um quadrado tem lado de um metro. Queremos aumentar sua área de 1 para $1{,}04$ metro quadrado. De quanto devemos aumentar o lado? Se acrescentarmos duas faixas de largura $0{,}02$ m ao longo de dois lados vizinhos, cada faixa terá área de $0{,}02$ m^2. Juntas, elas fornecem o acréscimo desejado. Para completar o novo quadrado, porém, ainda falta o canto entre as faixas. Ao preenchê-lo, passamos da área desejada em $(0{,}02)^2 = 0{,}0004$ m^2. O lado procurado deve ser um pouco menor que $1{,}02$ m.

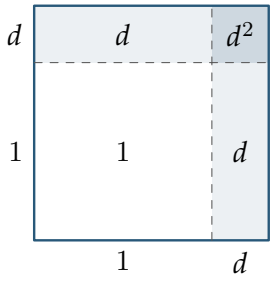


Figura 99: Quando um lado de comprimento 1 aumenta em $d > 0$, as duas faixas acrescentam $2d$ à área e o canto acrescenta d^2.

A geometria explica tanto o acerto da primeira estimativa quanto a direção da correção. Quando d é pequeno, as faixas respondem pela maior parte da área acrescentada. O canto, embora menor, passa a importar quando queremos mais precisão. Para encontrar o lado a partir da área, precisamos fazer a conta inversa. É o que faremos com a função raiz quadrada.

O polinômio de Taylor estende essa ideia a funções para as quais seria difícil desenhar o erro. A tangente fornece a primeira estimativa. As derivadas seguintes determinam correções sucessivas, e o resto permite avaliar a precisão do resultado. Todos os polinômios deste capítulo têm um número finito de termos.

6.1 Da aproximação linear ao polinômio de Taylor

No problema do quadrado, seja x o acréscimo de área, medido em metros quadrados. O novo lado, medido em metros, é $f(x) = \sqrt{1+x}$. O centro natural para a aproximação é $x = 0$, onde conhecemos $f(0) = 1$. Como $f'(0) = 1/2$, a tangente nesse ponto tem equação

$$P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}.$$

O índice 1 indica que ajustamos até a primeira derivada. Para $x = 0{,}04$, a tangente prevê exatamente os $1{,}02$ m que encontramos com as duas faixas.

Para corrigir essa previsão, queremos conservar o que a reta já acerta em zero, tanto o valor da função quanto a inclinação. Uma constante acrescentada à reta mudaria sua altura. Um termo proporcional a x mudaria sua inclinação. A potência mais simples que podemos acrescentar preservando ambas é x^2, pois x^2 e sua derivada $2x$ se anulam em zero. Isso sugere procurar um polinômio da forma

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + c_2 x^2.$$

Resta determinar c_2. Se a reta deixa um erro aproximadamente igual a c_2x^2, a razão entre esse erro e x^2 deve se aproximar de c_2. Para a raiz quadrada, conseguimos calcular essa razão exatamente.

Exemplo 6.1.

Melhore a aproximação linear $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, acrescentando um termo quadrático. Explique a escolha de seu coeficiente e confira que o polinômio obtido tem, em zero, o mesmo valor e as mesmas duas primeiras derivadas da função.

Solução. Racionalizamos para descobrir o tamanho do erro da aproximação linear. Para $x > -1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} &= \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x(1-\sqrt{1+x})}{2(\sqrt{1+x}+1)} = -\frac{x^2}{2(\sqrt{1+x}+1)^2}.\end{aligned}$$

O erro contém um fator x^2; o outro fator tende a $-\frac{1}{8}$ quando $x \to 0$. Isso sugere corrigir a reta pelo termo $-\frac{x^2}{8}$, obtendo

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

A correção elimina o termo dominante do erro: para $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x} - P_2(x)}{x^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(\sqrt{1+x}+1)^2} \longrightarrow 0.$$

Portanto, depois da correção, o erro se torna pequeno até mesmo em comparação com x^2. A escolha é única, pois para qualquer coeficiente c_2 o limite de $\big(f(x) - 1 - x/2 - c_2x^2\big)/x^2$ é $-1/8 - c_2$.

Conferimos agora o significado da escolha em termos de derivadas. Para $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}.$$

Temos $P_2(0) = f(0) = 1$, $P_2'(0) = f'(0) = \frac{1}{2}$ e $P_2''(0) = f''(0) = -\frac{1}{4}$. O termo quadrático acrescenta à altura e à inclinação a informação sobre como a inclinação varia no centro.

Para o quadrado da abertura, obtemos $P_2(0{,}04) = 1{,}02 - (0{,}04)^2/8 = 1{,}0198$ m. Podemos conferir a precisão sem conhecer o valor da raiz. Como $1{,}0198^2 = 1{,}03999204$, temos

$$0 < \sqrt{1{,}04} - 1{,}0198 = \frac{1{,}04 - 1{,}03999204}{\sqrt{1{,}04} + 1{,}0198} < \frac{0{,}00000796}{2} < 0{,}000004.$$

A estimativa corrigida fica a menos de quatro milionésimos de metro do lado procurado. A Figura 100 mostra o que acontece com as duas aproximações quando variamos x.

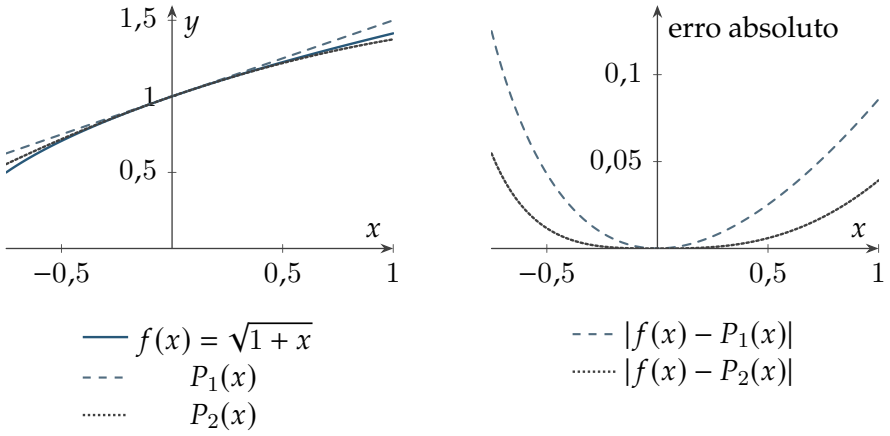


Figura 100: Aproximações de $\sqrt{1+x}$ em zero e seus erros absolutos. Perto do centro, o termo quadrático reduz o erro.

6.1.1 Reconstruir o comportamento da função perto de um ponto

No exemplo do quadrado, o centro era zero. Por isso, o valor de x e o deslocamento a partir do centro coincidiam. Se o centro é a, convém distinguir o ponto x em que faremos a estimativa do deslocamento $h = x - a$ necessário para chegar até ele. Escrevemos, então, $x = a + h$. Suponha que conheçamos $f(a)$ e algumas derivadas de f em a. Queremos usar esses dados para construir uma aproximação que acompanhe o gráfico de f perto desse ponto.

O valor $f(a)$ determina a altura do gráfico no centro. A primeira derivada $f'(a)$ determina a inclinação da tangente. A segunda derivada $f''(a)$ informa como essa inclinação varia quando mudamos x; a terceira descreve a variação da segunda, e assim sucessiva-

mente. Conhecer mais derivadas significa conhecer mais aspectos do comportamento local, não conhecer o valor da função em mais pontos.

A aproximação constante $P_0(x) = f(a)$ conserva apenas a altura. A reta $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ conserva altura e inclinação. Procuramos agora uma parábola que conserve também a segunda derivada e, depois, um polinômio cúbico que conserve a terceira. A construção de ordem n seguirá o mesmo princípio:

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Essas igualdades são o objetivo; a fórmula de Taylor será a solução desse conjunto de condições.

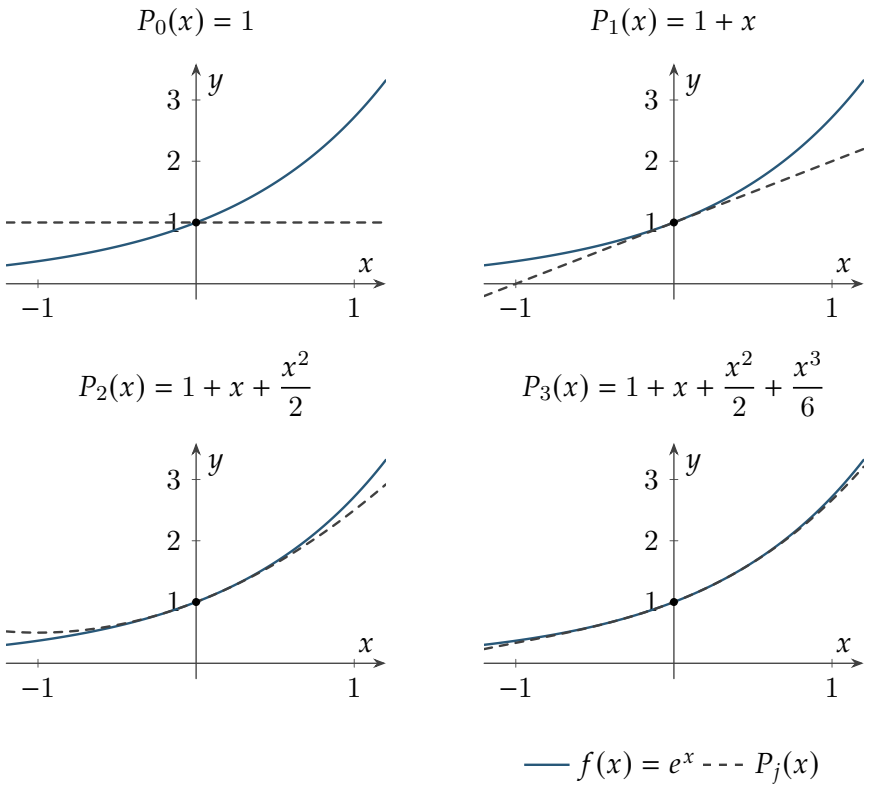


Figura 101: A função $f(x) = e^x$ e quatro aproximações no centro zero, sempre na mesma escala. Todas passam por $(0, 1)$. A reta ajusta a inclinação; os termos quadrático e cúbico ajustam derivadas adicionais. A coincidência perto do centro melhora, embora as curvas continuem diferentes fora dele.

Na Figura 101, a aproximação constante cruza a curva em zero sem acompanhar sua direção. A reta tangente acompanha a direção, mas não a mudança da inclinação. A parábola incorpora essa mudança. Para perceber o papel do termo cúbico, também é útil comparar as derivadas dos gráficos: ele permite que a segunda derivada da aproximação acompanhe a variação da segunda derivada de f.

6.1.2 A álgebra dos primeiros coeficientes

Usamos $h = x - a$, pois o ponto de interesse passa a corresponder a $h = 0$. Como $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = 1$, derivar uma expressão em h em relação a x não acrescenta nenhum fator. Escrevamos o polinômio de ordem três que procuramos, P_3, com seus quatro coeficientes ainda por determinar.

$$P_3(x) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3, \qquad h = x - a.$$

Derivando cada parcela, obtemos

$$\begin{aligned} P_3'(x) &= c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2, \\ P_3''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 h, \\ P_3'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 c_3. \end{aligned}$$

No centro, $h = 0$. Todas as parcelas que ainda contêm uma potência positiva de h desaparecem. As quatro condições de coincidência se reduzem a

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a), \qquad c_1 = f'(a), \\ 2c_2 &= f''(a), \quad 6c_3 = f'''(a). \end{aligned}$$

Os dois primeiros coeficientes já estão determinados. Das duas últimas equações obtemos

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{6}.$$

Substituindo esses valores na expressão inicial de P_3, encontramos

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3.$$

O denominador dois compensa as duas derivações de h^2; o denominador seis compensa as três derivações de h^3, que produzem $3 \cdot 2 \cdot 1$. Esses fatores não são escolhidos para melhorar o desenho: são impostos pelas igualdades das derivadas.

Cada termo novo preserva os ajustes anteriores. Ao acrescentar $c_2 h^2$, seu valor e sua primeira derivada são zero no centro; somente a segunda derivada recebe o acréscimo $2c_2$. Ao acrescentar $c_3 h^3$, o valor, a primeira e a segunda derivadas anteriores continuam intactos; a terceira recebe $6c_3$.

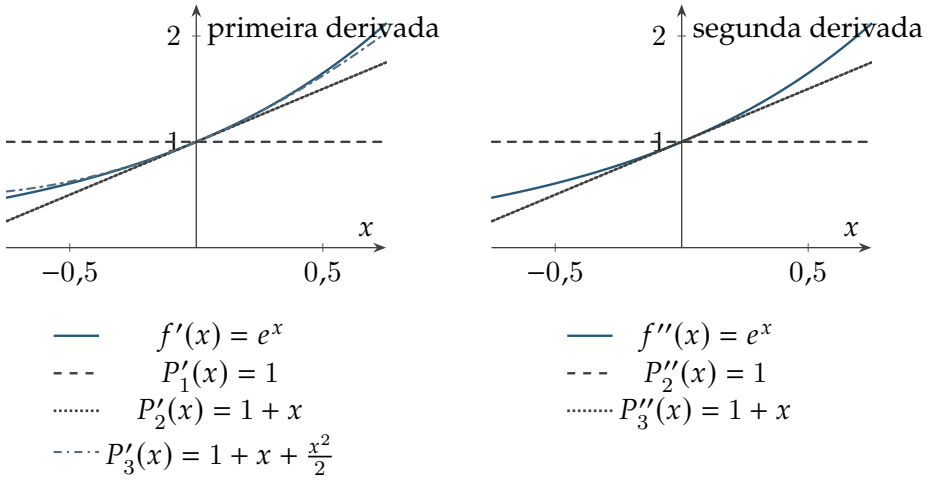


Figura 102: Para $f(x) = e^x$, temos também $f'(x) = f''(x) = e^x$. À esquerda, P_1' apenas acerta o valor no centro, enquanto P_2' também é tangente ao gráfico de f'. À direita, $P_3''(x) = 1 + x$ é tangente ao gráfico de f'', pois coincide com ele no valor e na primeira derivada em zero.

6.1.3 Por que escrever potências de $x - a$

Poderíamos começar com potências de x, mas os coeficientes ficariam misturados nas condições do centro. Para comparar as duas maneiras de escrever o mesmo polinômio de ordem dois, tomemos

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

As condições em a seriam

$$Aa^2 + Ba + C = f(a), \qquad 2Aa + B = f'(a), \qquad 2A = f''(a).$$

A última igualdade dá $A = f''(a)/2$. Substituindo na penúltima e depois na primeira,

$$B = f'(a) - a f''(a),$$

$$\begin{aligned} C &= f(a) - \frac{a^2 f''(a)}{2} - a\big(f'(a) - a f''(a)\big) \\ &= f(a) - a f'(a) + \frac{a^2 f''(a)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\big(x^2 - 2ax + a^2\big) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2. \end{aligned}$$

Chegamos ao mesmo polinômio. Escrever diretamente em potências de $x - a$ separa as condições e evita resolver esse sistema de equações. Essa forma também mostra o deslocamento $x - a$, cujo módulo mede a distância ao centro.

6.1.4 O coeficiente de ordem qualquer e o fatorial

Para encontrar o polinômio de uma ordem qualquer n, escreva $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$. Para acompanhar o que acontece com uma parcela, derivamos a potência repetidamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-a)^k &= k(x-a)^{k-1} \qquad (k \geqslant 1),\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x-a)^k &= k(k-1)(x-a)^{k-2} \qquad (k \geqslant 2),\\
\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(x-a)^k &= \frac{k!}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} \qquad (0 \leqslant j \leqslant k).
\end{aligned}$$

Depois de k derivações, resta a constante $k!$; qualquer derivação adicional dá zero. Ao avaliar em $x = a$, há três casos:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(x-a)^k\right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & k < j \quad \text{(a parcela já desapareceu)},\\ j!, & k = j \quad \text{(restou uma constante)},\\ 0, & k > j \quad \text{(ainda há uma potência positiva de } x-a\text{)}. \end{cases}$$

Para $j = k = 0$, a parcela é a função constante um, cujo valor é um. Não há necessidade de atribuir significado a uma expressão 0^0.

Assim, na derivada de ordem j da soma inteira, apenas uma parcela sobrevive no centro:

$$P_n^{(j)}(a) = j!\,c_j.$$

Impor $P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ determina

$$c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Todos os coeficientes foram determinados. Existe, portanto, um único polinômio de grau no máximo n que satisfaz as $n+1$ condições no centro.

Outra leitura da mesma álgebra é usar as parcelas já divididas pelo fatorial:

$$1, \quad (x-a), \quad \frac{(x-a)^2}{2!}, \quad \frac{(x-a)^3}{3!}, \quad \ldots$$

A parcela $(x-a)^k/k!$ tem derivada de ordem k igual a um no centro e todas as outras derivadas de ordens $0, \ldots, n$ iguais a zero nesse ponto. Multiplicá-la por $f^{(k)}(a)$ ajusta precisamente a informação de ordem k, sem modificar as demais. Somar essas contribuições produz a fórmula geral.

Definição 6.1.

O *polinômio de Taylor de ordem n* de f no centro a é o único polinômio de grau no máximo n cujas derivadas de ordens $0, 1, \ldots, n$ coincidem com as de f em a. Quando essas derivadas existem, ele é dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Usamos $f^{(0)} = f$ e $0! = 1$. Quando $a = 0$, ele também é chamado *polinômio de Maclaurin*.

Na soma, a é o centro fixado, x é o ponto em que avaliamos a aproximação e k apenas enumera as parcelas. Os números $f^{(k)}(a)/k!$ são constantes em relação a x. A ordem n diz quantas derivadas foram ajustadas, contando separadamente o valor da função; o grau efetivo pode ser menor se os últimos coeficientes forem nulos. Para $\operatorname{sen} x$, por exemplo, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$, de modo que o polinômio de ordem dois é $P_2(x) = x$, de grau um.

6.1.5 Uma função polinomial vista a partir de outro centro

Exemplo 6.2.

Reescreva $f(x) = x^4$ em potências de $x - 2$, primeiro por álgebra e depois pelas derivadas. Compare as aproximações de ordens um, dois e três para $f(2{,}1)$.

Solução. Ponhamos $h = x - 2$, de modo que $x = 2 + h$. Elevando ao quadrado duas vezes,

$$\begin{aligned}(2+h)^4 &= (4 + 4h + h^2)^2 \\ &= 16 + 16h^2 + h^4 + 32h + 8h^2 + 8h^3 \\ &= 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4.\end{aligned}$$

A segunda linha contém os quadrados das três parcelas e seus três produtos duplos. Essa é uma identidade exata, válida para todo h.

Pelas derivadas,

$$f'(x) = 4x^3, \qquad f''(x) = 12x^2, \qquad f'''(x) = 24x, \qquad f^{(4)}(x) = 24.$$

No centro dois, os valores são $16, 32, 48, 48, 24$, incluindo a função. Dividindo cada um pelo fatorial correspondente, encontramos

$$P_4(2+h) = 16 + 32h + \frac{48}{2}h^2 + \frac{48}{6}h^3 + \frac{24}{24}h^4,$$

exatamente a expressão obtida por álgebra. Os coeficientes das potências de $x-2$ são diferentes dos coeficientes das potências de x, embora a função seja a mesma.

Para $x = 2{,}1$, usamos $h = 1/10$, não $h = 2{,}1$. Assim,

$$\begin{aligned}P_1(2{,}1) &= 16 + \frac{32}{10} = 19{,}2, \\ P_2(2{,}1) &= 19{,}2 + \frac{24}{100} = 19{,}44, \\ P_3(2{,}1) &= 19{,}44 + \frac{8}{1000} = 19{,}448.\end{aligned}$$

O valor exato é $19{,}4481$. Os erros são, respectivamente, $0{,}2481$, $0{,}0081$ e $0{,}0001$, calculados pelas parcelas que faltam na identidade. Cada aproximação utiliza mais informações locais; a de ordem quatro recupera a função inteira porque ela já é um polinômio desse grau.

6.1.6 O significado de aproximar e a importância da distância

As condições no centro não afirmam que $P_n = f$ nos pontos próximos. Para uma função geral, a diferença permanece e precisa ser controlada. Se $R_n = f - P_n$, a construção dá

$$R_n(a) = R_n'(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

O erro e suas primeiras derivadas se anulam no centro. É nesse sentido que o contato entre os gráficos se torna mais estreito. Na seção seguinte, relacionaremos esse contato a uma estimativa de erro que depende de $|x - a|^{n+1}$, sob uma hipótese adicional sobre a derivada seguinte. Isso permitirá escolher uma ordem para uma precisão desejada.

O exemplo a seguir permite observar toda essa relação por uma identidade finita, antes de usar um teorema de resto.

Exemplo 6.3.

Construa o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ em zero e obtenha uma expressão exata para o erro. Explique por que a distância ao centro importa.

Solução. Por derivação sucessiva,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

A última fórmula segue por indução: derivar $k!(1-x)^{-k-1}$ multiplica por $-(k+1)$ e pelo fator -1 da função interna, produzindo $(k+1)!(1-x)^{-k-2}$. Logo $f^{(k)}(0) = k!$, e todos os coeficientes de Taylor são um:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Multiplicando essa soma finita por $1 - x$, os termos intermediários se cancelam:

$$\begin{aligned}(1-x)P_n(x) &= (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) \\ &= 1 - x^{n+1}.\end{aligned}$$

Para $x \neq 1$, podemos dividir e subtrair:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Portanto o erro tem um fator x^{n+1}. Por exemplo, em $|x| \leqslant 1/2$, vale $|1-x| \geqslant 1/2$, e

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant 2|x|^{n+1}.$$

Para um mesmo x com $|x| < 1$, passar da ordem n à ordem $n+1$ multiplica o erro absoluto por $|x|$. Os valores exatos abaixo mostram a combinação entre ordem e distância:

x	erro de P_0	erro de P_1	erro de P_2	erro de P_3
$1/2$	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$
$1/4$	$1/3$	$1/12$	$1/48$	$1/192$
$1/8$	$1/7$	$1/56$	$1/448$	$1/3584$

Já em $x = 2$, a função está definida, mas $|f(2) - P_n(2)| = 2^{n+1}$, que cresce com a ordem. Os coeficientes foram escolhidos para reproduzir o comportamento em zero; não garantem uma boa aproximação em qualquer ponto do domínio.

O mesmo princípio tem usos diferentes. Em uma conta numérica, substituímos uma função por adições e multiplicações acompanhadas de uma estimativa garantida para o erro. Em um problema de movimento, posição, velocidade e aceleração fornecem os primeiros coeficientes da posição futura. Em um limite, a expansão separa as parcelas que se cancelam e revela a primeira que permanece. As aplicações seguintes desenvolverão essas contas. O próximo passo é demonstrar como controlar o erro quando não há uma identidade exata como a do exemplo anterior.

6.2 O resto e a precisão da aproximação

A diferença $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é o *resto de Taylor*. Ela mede o erro com sinal. Para certificar a aproximação, procuramos um valor que $|R_n(x)|$ não ultrapasse, no ponto ou no intervalo considerado.

Teorema 6.1. *Taylor com resto de Lagrange.*

Seja $n \geqslant 0$ inteiro. Suponha que f tenha derivadas contínuas até a ordem $n+1$ em um intervalo aberto que contém o segmento entre a e x. Se $x \neq a$, existe ξ estritamente entre a e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Em particular, se $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ em todo esse segmento, então

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

No centro, o resto é zero.

Demonstração. Fixe $x \neq a$ e escolha K de modo que a função

$$G(t) = f(t) - P_n(t) - K(t-a)^{n+1}$$

se anule também em $t = x$. Como $x - a \neq 0$, essa escolha é possível e única: $K = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$.

Pela construção de P_n, temos $G(a) = G'(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0$, além de $G(x) = 0$. Rolle fornece um zero de G' entre a e x. Se $n \geqslant 1$, aplicamos Rolle entre esse zero e a, onde G' também se anula, para obter um zero de G''. Repetindo o argumento, após $n+1$

aplicações encontramos ξ entre a e x com $G^{(n+1)}(\xi) = 0$. Para $n = 0$, a primeira aplicação já basta. O raciocínio vale dos dois lados do centro.

Como a derivada de ordem $n+1$ de P_n é zero,

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K.$$

Substituir K dá a fórmula do resto. Tomar módulos e aplicar $|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant M$ fornece a estimativa. □

Não conhecemos, em geral, o ponto ξ. Por isso, a desigualdade $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ precisa valer em todo o segmento, e não apenas no centro. Para $n = 1$, recuperamos o erro da linearização estudado na Seção 3.7. O valor que limita o erro pode ser maior que o erro real.

Exemplo 6.4.

Uma partícula move-se sobre uma reta. Sua posição $s(t)$, em metros, tem quatro derivadas contínuas perto de $t = 2$ segundos. Nesse instante,

$$s(2) = 10, \qquad s'(2) = 3, \qquad s''(2) = -4, \qquad s'''(2) = 6.$$

Além disso, $|s^{(4)}(t)| \leqslant 12$ para $2 \leqslant t \leqslant 2{,}2$, nas unidades correspondentes. Estime $s(2{,}2)$ por um polinômio cúbico e certifique o erro. Interprete cada parcela.

Solução. O centro é o instante em que os dados foram medidos. Escrevemos $h = t-2$; para o instante pedido, $h = 0{,}2 = 1/5$ segundo. A construção de Taylor dá

$$\begin{aligned} P_3(2+h) &= s(2) + s'(2)h + \frac{s''(2)}{2!}h^2 + \frac{s'''(2)}{3!}h^3 \\ &= 10 + 3h - 2h^2 + h^3. \end{aligned}$$

A parcela 10 é a posição inicial. A parcela $3h$ é o deslocamento previsto se a velocidade permanecesse em 3 m/s. O termo $-2h^2$ corrige essa previsão pela aceleração negativa. O termo h^3 incorpora a variação da aceleração, registrada por $s'''(2)$.

As unidades também conferem a fórmula. A velocidade, em m/s, é multiplicada por h, em segundos; a aceleração, em m/s^2, por h^2; a terceira derivada, em m/s^3, por h^3. Todas as parcelas representam metros. Numericamente,

$$P_3(2{,}2) = 10 + \frac{3}{5} - \frac{2}{25} + \frac{1}{125} = 10 + 0{,}6 - 0{,}08 + 0{,}008 = 10{,}528 \text{ m}.$$

O resto de Lagrange e a desigualdade fornecida no intervalo dão

$$|s(2{,}2) - 10{,}528| \leqslant \frac{12}{4!}\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{1250} \text{ m} = 0{,}8 \text{ mm}.$$

Logo a posição pertence a $[10{,}5272;\, 10{,}5288]$ metros. Esse intervalo é uma previsão certificada pelas hipóteses do enunciado, mesmo sem conhecermos uma fórmula para $s(t)$.

Os quatro dados no instante dois determinam o polinômio, mas a certificação exigiu também a desigualdade $|s^{(4)}(t)| \leqslant 12$ em todo o intervalo. Se fossem medições apro-

ximadas, seus erros também precisariam entrar na previsão. Por exemplo, um erro de no máximo η em $s'(2)$, em m/s, acrescentaria no máximo $|h|\eta = \eta/5$ metro ao erro final, mantendo exatos os outros dados.

Forma integral do resto.

Sob as mesmas hipóteses, também vale

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Para demonstrar, denote o membro da direita por I_n, mantendo x fixo. O Teorema Fundamental dá $I_0 = f(x) - f(a)$. Para $k \geqslant 1$, integração por partes, com $u = (x-t)^k/k!$ e $\mathrm{d}v = f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$, fornece

$$I_k = -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + I_{k-1}.$$

De fato, o termo de borda em $t = x$ é zero e $\mathrm{d}u = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}t$. Aplicar essa identidade para $k = n, n-1, \ldots, 1$ resulta em $I_n = f(x) - P_n(x)$. As integrais são orientadas, de modo que a prova também vale para $x < a$.

Exemplo 6.5.

Determine o polinômio de Taylor de ordem dois de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no centro 8. Use-o para aproximar $\sqrt[3]{8{,}12}$, com erro absoluto inferior a $5\cdot 10^{-7}$.

Solução. O centro 8 permite calcular exatamente a raiz e as derivadas. Para $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}, \qquad f'''(x) = \frac{10}{27x^{8/3}}.$$

Logo $f(8) = 2$, $f'(8) = \frac{1}{12}$ e $f''(8) = -\frac{1}{144}$. Portanto

$$P_2(x) = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}.$$

O incremento é $h = 8{,}12 - 8 = \frac{3}{25}$. Substituindo sem arredondamentos intermediários,

$$P_2(8{,}12) = 2 + \frac{3}{25\cdot 12} - \frac{9}{625\cdot 288} = 2 + \frac{1}{100} - \frac{1}{20000} = 2{,}00995.$$

No segmento $[8, 8{,}12]$, a terceira derivada é positiva e decrescente; assim,

$$0 < f'''(t) \leqslant f'''(8) = \frac{5}{3456}.$$

O resto de Lagrange tem sinal positivo, pois $h > 0$, e satisfaz

$$0 < f(8{,}12) - P_2(8{,}12) \leqslant \frac{5}{3456\cdot 6}\left(\frac{3}{25}\right)^3 = \frac{1}{2400000} < 5\cdot 10^{-7}.$$

Logo $2{,}00995$ é a aproximação pedida e subestima o valor exato. A desigualdade certifica a precisão sem exigir o cálculo prévio da raiz.

Exemplo 6.6.

Aproxime $\ln(1{,}1)$ por um polinômio de Maclaurin, com erro absoluto inferior a $3\cdot10^{-6}$. Forneça um intervalo que contenha o valor exato.

Solução. Aplicamos Taylor a $f(x)=\ln(1+x)$, com $x=\frac{1}{10}$. Suas derivadas sucessivas são

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4},\qquad f^{(5)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}.$$

Em $[0,\frac{1}{10}]$, temos $|f^{(4)}|\leqslant 6$. A estimativa para a ordem três seria $6(1/10)^4/4!=\frac{1}{40000}$, maior que a tolerância. Isso mostra apenas que essa estimativa não certifica a precisão desejada. Não prova que toda aproximação cúbica falha.

Usamos então a ordem quatro. Substituir as derivadas no centro dá

$$P_4(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4},$$

e, no ponto escolhido,

$$P_4\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}-\frac{1}{40000}=\frac{11437}{120000}.$$

Como $0<f^{(5)}(t)\leqslant 24$ no segmento, o resto é positivo e

$$0<\ln(1{,}1)-\frac{11437}{120000}\leqslant\frac{24}{5!}\left(\frac{1}{10}\right)^5=\frac{1}{500000}=2\cdot10^{-6}.$$

Assim, um intervalo garantido é

$$\frac{11437}{120000}<\ln(1{,}1)\leqslant\frac{11437}{120000}+\frac{1}{500000}.$$

Se apresentarmos a aproximação decimal $0{,}09530833$, o arredondamento acrescentará menos de $5\cdot10^{-9}$ ao erro. O erro total continuará menor que $3\cdot10^{-6}$.

Capítulo 7

Sequências e aproximações sucessivas

Fixe um ponto x e calcule, nesse ponto, os polinômios de Taylor de ordens sucessivas. Os números $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots$ formam uma sequência. Algo parecido acontece quando repetimos um cálculo de raiz ou aproximamos uma área com retângulos cada vez mais estreitos. Conhecer dois resultados próximos desperta uma pergunta: os valores seguintes também permanecerão perto do número que procuramos?

Começaremos com uma sequência cujo erro pode ser escrito exatamente em função do índice. Podemos então decidir quantos termos bastam para atingir uma precisão dada. Depois usaremos essas ideias quando os termos forem calculados um a um e ainda não soubermos qual é o limite.

7.1 Termos, índices e limites

Considere os números $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Para encontrar os primeiros termos, substituímos o índice por 1, 2 e 3: $a_1 = 5/2$, $a_2 = 8/3$ e $a_3 = 11/4$. O índice n indica a posição; a_n, o valor nessa posição. A identidade

$$a_n = \frac{3(n+1)-1}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$$

permite calcular a distância de qualquer termo a 3. O erro é exatamente $\frac{1}{n+1}$, que podemos tornar tão pequeno quanto quisermos escolhendo índices suficientemente grandes.

Definição 7.1.

Uma **sequência real** é uma função que associa um número real a cada índice natural de seu domínio. Escrevemos (a_n) para a sequência e a_n para um de seus termos. O índice inicial pode ser 0, 1 ou outro inteiro explicitado no enunciado.

Uma fórmula como a anterior fornece o termo diretamente. Uma **recorrência** fornece o próximo termo a partir dos anteriores; nesse caso, os valores iniciais fazem parte da definição. Por exemplo, $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ determinam 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ...

No estudo de limites de funções, controlamos a distância da variável ao ponto. Aqui, controlamos o índice a partir do qual todos os erros ficam pequenos. A palavra "todos" exclui uma sequência que só ocasionalmente se aproxima do valor considerado.

Definição 7.2.

A sequência (a_n) **converge** para L, e escrevemos $a_n \to L$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro N tal que

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Uma sequência que não converge para nenhum número real é dita **divergente**.

Exemplo 7.1.

Para $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$, encontre um índice a partir do qual o erro em relação a 3 seja menor que 10^{-3}. Justifique o limite pela definição.

Solução. A identidade da introdução dá o erro sem aproximação:

$$|a_n - 3| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Como $n+1 > 0$, podemos multiplicar a desigualdade $\frac{1}{n+1} < 10^{-3}$ por $1000(n+1)$. Obtemos $1000 < n+1$, ou $n > 999$. Assim, $N = 1000$ serve. Esse é o menor índice possível, pois $n = 999$ ainda dá erro igual a 10^{-3}.

Para provar a convergência, a tolerância deve poder ser qualquer $\varepsilon > 0$. A mesma conta dá

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Basta, por exemplo, escolher um inteiro $N > 1/\varepsilon$. Para todo $n \geqslant N$, temos $n+1 > N$, portanto

$$|a_n - 3| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

O índice N pode depender da precisão pedida. Depois de escolhido, a estimativa vale para todos os termos seguintes.

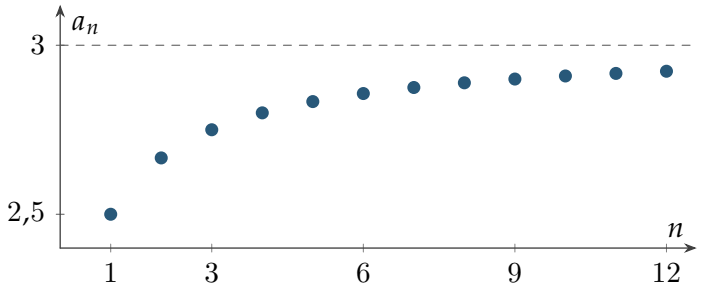


Figura 103: Os valores são pontos de uma sequência. A reta indica o limite, que não é atingido.

O limite é único. Se $L \neq M$ fossem limites, poderíamos exigir um erro menor que $|L-M|/3$ em relação a cada um deles. Escolhendo um índice a partir do qual as duas exigências fossem satisfeitas, teríamos

$$|L - M| \leqslant |L - a_n| + |a_n - M| < \frac{2}{3}|L - M|,$$

o que é impossível.

Uma sequência convergente também é limitada. Se $a_n \to L$, existe N tal que $|a_n - L| < 1$ para $n \geqslant N$. Pela desigualdade triangular, esses termos satisfazem $|a_n| < |L| + 1$. Os termos de índices menores que N são uma lista finita. Se B é o maior entre esses módulos e $|L| + 1$, então $|a_n| \leqslant B$ para todo índice, o que prova a limitação da sequência inteira.

As leis de soma, produto e quociente de limites valem para sequências; no quociente, o limite do denominador deve ser diferente de zero. As provas usam as mesmas estimativas da Seção A.2, escolhendo um índice suficientemente grande para satisfazer todas as tolerâncias. Também vale o confronto: se $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$ a partir de certo índice e $u_n, v_n \to L$, então $a_n \to L$, pois as duas desigualdades prendem a_n entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$.

Se $a_n = f(n)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, então $a_n \to L$: basta restringir a condição do limite aos argumentos inteiros. A recíproca não vale para uma extensão qualquer. A função $\operatorname{sen}(2\pi x)$ não tem limite no infinito, embora seus valores nos inteiros sejam todos nulos.

Exemplo 7.2.

Calcule $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$.

Solução. Os dois termos crescem, e subtrair limites infinitos não resolve a diferença. Multiplicamos pelo conjugado para usar a identidade $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$. Para $n \geqslant 1$, o conjugado é positivo, e

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}. \end{aligned}$$

Agora colocamos n^2 em evidência dentro da raiz. Como o índice é positivo, $\sqrt{n^2} = n$, de modo que

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

O fator n pôde ser cancelado porque $n \neq 0$. No último quociente, $1/n \to 0$ e o denominador tende a 2, diferente de zero. Portanto o limite é $1/2$.

7.2 Oscilação e crescimento

Uma sequência pode apresentar comportamentos diferentes conforme os índices escolhidos. Em $((-1)^n)$, por exemplo, escolher $n = 2, 4, 6, \ldots$ dá apenas 1; escolher $n = 1, 3, 5, \ldots$ dá apenas -1. Uma escolha que preserva a ordem e avança indefinidamente nos índices produz uma **subsequência**, escrita (a_{n_k}), com $n_1 < n_2 < \cdots$. O número k conta os termos escolhidos; n_k informa onde cada um deles estava na sequência original.

Se $a_n \to L$, toda subsequência também converge para L. De fato, para uma tolerância $\varepsilon > 0$, há um índice N a partir do qual $|a_n - L| < \varepsilon$. Como $n_k \geqslant k$ quando os índices naturais começam em 1, tomar $k \geqslant N$ garante $n_k \geqslant N$. Se a sequência começa em zero, basta ajustar o índice inicial; a conclusão é a mesma.

Exemplo 7.3.

Compare a convergência de $a_n = (-1)^n$ e $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Solução. Os termos pares de a_n valem 1; os ímpares, -1. Se a sequência convergisse, essas duas subsequências teriam o mesmo limite, o que é impossível. Assim, limitação não basta para convergência.
Já $-\frac{1}{n} \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{n}$. Pelo confronto, $b_n \to 0$. Os sinais continuam alternando, mas a amplitude diminui. A convergência não exige monotonicidade.

Quando os termos acabam ultrapassando qualquer patamar fixado, escrevemos $a_n \to +\infty$. Precisamente, para todo $M \in \mathbb{R}$, existe N tal que $n \geqslant N$ implica $a_n > M$. A definição de $-\infty$ é análoga. Esses símbolos descrevem divergência; não são limites reais. Por exemplo, $n \to +\infty$, enquanto $(-1)^n n$ não tende a nenhum dos dois infinitos.

Exemplo 7.4.

Mostre que $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0$ e $\dfrac{2^n}{n!} \to 0$, sem usar uma soma infinita.

Solução. Como as parcelas são positivas, podemos comparar um termo com o seguinte por meio de seu quociente. Para $u_n = n^2/2^n$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Se $n \geqslant 3$, então $1 + 1/n \leqslant 4/3$, e a razão é no máximo $(1/2)(4/3)^2 = 8/9$. Isso significa que, a partir de u_3, cada termo é no máximo $8/9$ do anterior:

$$u_4 \leqslant \frac{8}{9}u_3, \qquad u_5 \leqslant \left(\frac{8}{9}\right)^2 u_3, \qquad 0 < u_n \leqslant u_3\left(\frac{8}{9}\right)^{n-3}.$$

A potência geométrica tende a zero. Podemos vê-lo escrevendo $(8/9)^n = e^{n\ln(8/9)}$, cujo expoente tende a $-\infty$. O confronto prova $u_n \to 0$.

Para $v_n = 2^n/n!$, o fatorial do termo seguinte é $(n+1)! = (n+1)n!$. Assim,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \qquad (n \geqslant 3).$$

Repetindo essa desigualdade, obtemos $0 < v_n \leqslant v_3(1/2)^{n-3} \to 0$. Uma razão uniformemente menor que 1 permite comparar os termos com uma potência geométrica. A primeira conta compara uma potência de n com uma exponencial; a segunda compara uma exponencial com um fatorial.

O mesmo procedimento funciona para n^p/a^n, quando $a > 1$ e $p > 0$. A razão é $(1+1/n)^p/a$, que tende a $1/a < 1$. Escolhemos q entre $1/a$ e 1; a definição de limite garante que, depois de algum índice, todas as razões são menores que q. Para $a^n/n!$, a razão $a/(n+1)$ tende a zero e também fica abaixo de algum $q < 1$.

7.3 Monotonicidade e existência do limite

Retomemos a recorrência $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Em vez de procurar uma fórmula para x_n, podemos investigar se as aproximações avançam sempre no mesmo sentido e se há uma barreira que não ultrapassam. Essas duas propriedades permitirão provar a existência do limite antes de calcular seu valor.

Uma sequência é **crescente** se $a_{n+1} \geqslant a_n$, e **decrescente** se $a_{n+1} \leqslant a_n$. Usamos "estritamente" quando todas as desigualdades são estritas. Uma sequência de qualquer um desses tipos é **monótona**. Ela é **limitada superiormente** se existe um número M com $a_n \leqslant M$ para todo índice, e **limitada inferiormente** se existe m com $m \leqslant a_n$ para todo índice. Se existem ambos, a sequência é **limitada**. O **supremo** dos termos é o menor número que é maior ou igual a todos eles. O **ínfimo** é o maior número que é menor ou igual a todos eles. Esses números não precisam ser termos da sequência.

Conhecer o possível valor de um limite não prova que ele exista. O teorema seguinte combina monotonicidade e limitação para garantir essa existência; seu fundamento é a completude dos reais, discutida na Seção A.4.

Teorema 7.1. *Convergência monótona.*

Toda sequência crescente e limitada superiormente converge para o supremo de seus termos. Toda sequência decrescente e limitada inferiormente converge para o ínfimo de seus termos.

Demonstração. Seja $L = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}$. Dado $\varepsilon > 0$, deve existir N com $L - \varepsilon < a_N$. Caso contrário, todos os termos seriam menores ou iguais a $L - \varepsilon$, contrariando a escolha de L como o menor número maior ou igual a todos eles. Pela monotonicidade e pela definição de supremo,

$$L - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant L \qquad (n \geqslant N).$$

Segue que $|a_n - L| < \varepsilon$. Para uma sequência decrescente, aplicamos o resultado a $(-a_n)$.□

Exemplo 7.5.

Estude $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

Solução. Os primeiros termos $0, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots$ sugerem crescimento, mas uma lista finita não prova o comportamento de todos os termos. Para procurar um número que nenhum termo ultrapasse, suponhamos apenas por um instante que exista um limite L. A continuidade da raiz daria $L = \sqrt{2 + L}$, cujos candidatos são 2 e -1 depois de elevar ao quadrado. Como a raiz principal é não negativa, 2 é o candidato que sugere uma barreira.

Verifiquemos essa barreira sem pressupor a convergência. O primeiro termo satisfaz $0 \leqslant x_0 < 2$. Se $0 \leqslant x_n < 2$, então

$$2 \leqslant 2 + x_n < 4, \qquad 0 < x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < 2.$$

A indução garante que todos os termos estão definidos e permanecem em $[0, 2)$.

Para comparar x_{n+1} com x_n, ambos não negativos, podemos comparar seus quadrados. Temos

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (2 - x_n)(x_n + 1) > 0.$$

Portanto $x_{n+1} > x_n$. A sequência é crescente e limitada superiormente por 2, logo converge para algum $L \in [0, 2]$.

Agora é legítimo passar ao limite na recorrência. Pela continuidade da raiz,

$$L = \sqrt{2 + L}, \qquad L^2 - L - 2 = (L - 2)(L + 1) = 0.$$

A possibilidade $L = -1$ fica excluída por $L \geqslant 0$. Concluímos que $x_n \to 2$. A equação do ponto fixo sugeriu inicialmente o valor que nenhum termo ultrapassa. A indução e a monotonicidade foram o que permitiu provar a convergência.

Exemplo 7.6.

Explique por que resolver $L = 2L - 1$ não determina o limite da sequência $x_0 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

Solução. A equação tem a única solução $L = 1$, mas sua obtenção pressupõe convergência para um número real. Subtraindo 1 da recorrência,

$$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1).$$

Como $x_0 - 1 = 1$, temos $x_1 - 1 = 2$, $x_2 - 1 = 2^2$, e a indução fornece $x_n - 1 = 2^n$. Assim, $x_n = 1 + 2^n \to +\infty$. O ponto fixo 1 existe, mas essa escolha inicial se afasta dele. A equação do possível limite é uma condição necessária, não uma prova de convergência.

7.6 Questões propostas

7.6.1 Limites e comparação de termos

Questão 1. Prove pela definição que $a_n = \frac{5n-1}{2n+3} \to \frac{5}{2}$. Encontre o menor inteiro N para o qual $|a_n - \frac{5}{2}| < 10^{-2}$ sempre que $n \geqslant N$.

Questão 2. Calcule $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+3n} - 2n)$.

Questão 3. Estude a convergência de $a_n = 2 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$. A sequência precisa ser monótona para que seu argumento funcione?

Questão 4. Prove que $\frac{5^n}{n!} \to 0$, indicando um índice a partir do qual as razões consecutivas sejam no máximo $\frac{1}{2}$.

7.7 Soluções das questões propostas

7.7.1 Limites e comparação de termos

Questão 1.

Solução. Subtrair o candidato ao limite dá o erro exato:

$$\frac{5n-1}{2n+3}-\frac{5}{2}=\frac{10n-2-10n-15}{2(2n+3)}=-\frac{17}{4n+6}.$$

Para $\varepsilon > 0$, qualquer inteiro $N > 17/(4\varepsilon)$ garante, se $n \geqslant N$, que $|a_n - 5/2| = 17/(4n+6) < \varepsilon$. Na tolerância pedida, a condição exata é $17/(4n+6) < 1/100$, ou $n > 423{,}5$. O menor índice é $N = 424$; a fórmula do erro mostra que todos os termos seguintes também satisfazem a condição.

Questão 2.

Solução. Multiplicando pelo conjugado, para $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\frac{3}{\sqrt{4+3/n}+2}\longrightarrow\frac{3}{4}.$$

A divisão por n é válida porque o índice é positivo, e o denominador final tende a 4.

Questão 3.

Solução. Como $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ e $\sqrt{n} > 0$, podemos dividir e somar 2, obtendo $2 - 1/\sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant 2 + 1/\sqrt{n}$. Os dois extremos tendem a 2, portanto o confronto dá $a_n \to 2$. O argumento usa apenas $|a_n - 2| \leqslant 1/\sqrt{n}$, sem exigir monotonicidade. Para uma tolerância $\varepsilon > 0$, qualquer inteiro $N > 1/\varepsilon^2$ basta.

Questão 4.

Solução. Com $u_n = 5^n/n! > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{para } n\geqslant 9.$$

Assim, $u_{10} \leqslant u_9/2$, $u_{11} \leqslant u_9/2^2$, e a indução fornece $0 < u_n \leqslant u_9(1/2)^{n-9}$ para $n \geqslant 9$. O termo da direita tende a zero; logo $u_n \to 0$.

Capítulo 8

Séries numéricas

No capítulo anterior acompanhamos o termo de índice N de uma sequência. Agora queremos acompanhar o total acumulado até esse índice. Uma parcela pequena altera pouco o total naquele instante. Mesmo assim, muitas parcelas pequenas, somadas sucessivamente, podem produzir um total tão grande quanto se queira.

Quando conseguirmos escrever uma fórmula para o total de N parcelas, poderemos calcular seu limite com as ferramentas de sequências. Será o caso da geométrica e das somas com cancelamento. Quando for difícil obter uma fórmula para o total, a forma das parcelas ainda poderá indicar se a soma converge e quanto falta depois de parar a conta.

8.1 O significado de uma soma infinita

Somando $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, obtemos os totais $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$. Após N parcelas, a soma é $1 - 2^{-N}$. A expressão "somar todas as parcelas" passa a ter um significado preciso: considerar o limite desses totais, que neste caso é 1.

Definição 8.1.

Dada uma sequência $(a_n)_{n \geqslant n_0}$, suas **somas parciais** são

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} a_n.$$

A **série** $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se (S_N) converge para um número real S. Nesse caso, escrevemos $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = S$. Se não existe esse limite real, a série diverge.

Como N é o índice da última parcela, a soma S_N contém $N - n_0 + 1$ parcelas. O termo a_n e a soma parcial S_N são objetos diferentes. A convergência diz respeito aos totais S_N. Para uma série convergente, o **resto** ou **cauda** após o índice N é $R_N = S - S_N$, isto é, o limite da soma das parcelas de índices maiores que N.

Em uma **soma geométrica**, cada parcela depois da primeira é obtida multiplicando a anterior por uma constante r, chamada razão. Em $1 + r + r^2 + \cdots + r^N$, essa relação vale também quando $r = 0$. Para somá-las, escrevemos a soma e seu múltiplo por r:

$$T_N = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N, \qquad rT_N = r + r^2 + \cdots + r^{N+1}.$$

Subtraindo, todas as potências de r de expoentes $1, \dots, N$ desaparecem. Restam

$$(1-r)T_N = 1 - r^{N+1}, \qquad T_N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} \quad (r \neq 1).$$

Há $N+1$ parcelas porque o primeiro índice é zero. Se $|r| < 1$, temos $r^{N+1} \to 0$, dando a **série geométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Para $r = 1$, todas as parcelas valem um e $T_N = N+1 \to +\infty$. Os casos $r = -1$ e $|r| > 1$ serão examinados pelas próprias somas parciais.

Exemplo 8.1.

Calcule $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 5(2/3)^n$ e dê o resto após a parcela de índice $N \geqslant 3$.

Solução. A primeira parcela é $5(2/3)^3$. Para aplicar a fórmula que começa no expoente zero, escrevemos $n = 3 + k$. Quando n percorre $3, 4, 5, \dots$, o novo índice k percorre $0, 1, 2, \dots$. A identidade $(2/3)^n = (2/3)^3(2/3)^k$ permite colocar a primeira parcela em evidência.

$$\sum_{n=3}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{40}{27} \cdot 3 = \frac{40}{9}.$$

A cauda começa em $N+1$, portanto

$$R_N = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} \frac{1}{1-2/3} = 15\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}.$$

A expressão fornece o valor exato da cauda. Há $N-2$ parcelas na soma parcial, portanto o índice final e a quantidade de parcelas não coincidem neste exemplo.

Exemplo 8.2.

Estude $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n$.

Solução. Na primeira série, as somas parciais alternam entre 1 e 0. Não possuem limite, logo a série diverge. Não podemos usar $1/(1-r)$ com $r = -1$, pois sua dedução como soma infinita exigia $r^{N+1} \to 0$.

Para $r = -3$, a fórmula finita ainda vale:

$$S_N = \frac{1-(-3)^{N+1}}{4}.$$

As somas parciais têm módulos crescentes e sinais alternados; não convergem. De modo geral, para $|r| > 1$, o termo r^{N+1} não tende a zero e a fórmula finita não tem limite real. A igualdade algébrica da soma finita continua correta; o que falha é a passagem ao limite pretendida.

8.2 Cancelamentos nas somas parciais

Uma série é chamada **telescópica** quando escrever a soma parcial revela cancelamentos entre parcelas de índices diferentes. A dificuldade costuma ser encontrar uma forma do termo que torne esses cancelamentos visíveis. Se o denominador é um produto, tentar separar a fração em uma soma de frações mais simples pode ajudar. Essa decomposição recebe o nome de *frações parciais*.

Exemplo 8.3.

Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solução. O denominador já está fatorado. Se usarmos uma fração com denominador n e outra com denominador $n+1$, os dois denominadores reaparecerão deslocados de uma posição na parcela seguinte. Como os fatores são lineares, começamos com numeradores constantes e procuramos A e B tais que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Como $n \geqslant 1$, os denominadores são não nulos. Reduzindo o lado direito ao denominador comum,

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}.$$

Para o numerador ser igual a 1 para todo n, o coeficiente de n deve ser zero e o termo constante deve ser um. Obtemos o sistema

$$A + B = 0, \qquad A = 1,$$

de onde $A = 1$ e $B = -1$. Podemos conferir os coeficientes antes de somar:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Escrevemos agora a soma com N parcelas:

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

O termo negativo $-1/2$ cancela com o positivo $1/2$ da parcela seguinte. O mesmo ocorre até $1/N$. Sobram a primeira parcela positiva e a última negativa. Como $1/(N+1) \to 0$, a série converge para $S = 1$. Seu resto é exatamente

$$R_N = S - S_N = 1 - \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{N+1}.$$

Exemplo 8.4.

Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Solução. Começamos pela decomposição, deixando os coeficientes por determinar:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{(A+B)n + 2A}{n(n+2)}.$$

Comparar os numeradores fornece $A + B = 0$ e $2A = 1$, portanto $A = 1/2$ e $B = -1/2$. De fato,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{(n+2) - n}{2n(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}.$$

O termo negativo com denominador $n+2$ só encontra seu par duas posições adiante. Para ver o que sobra, escreva, por exemplo, as quatro primeiras parcelas e agrupe as contribuições positivas e negativas:

$$2S_4 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}.$$

Os denominadores 3 e 4 aparecem nas duas listas. Os dois menores aparecem apenas na primeira, os dois maiores apenas na segunda. Para uma soma que termina em N, o mesmo alinhamento fica

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k}\right).$$

Na segunda soma, fizemos $k = n + 2$. Para $N \geqslant 2$, os índices comuns $3, \ldots, N$ se cancelam. Os positivos de índices $1, 2$ e os negativos de índices $N+1, N+2$ ficam de fora desse cancelamento. Assim,

$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}.$$

A soma é $S = 3/4$, e a subtração $S - S_N$ dá

$$R_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right).$$

O deslocamento de dois índices deixa duas parcelas em cada extremidade da soma.

8.3 Uma condição necessária e seu limite

Se $S_N \to S$, então $a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0$. Portanto

$$\sum a_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0.$$

Se o termo geral não tende a zero, a série diverge. Se tende a zero, essa informação sozinha não decide a convergência.

Exemplo 8.5.

Decida a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ e de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Solução. Na primeira, $n/(n+1) \to 1$, diferente de zero. Na segunda, a subsequência de termos pares vale 1, e a de termos ímpares vale -1, portanto o termo não tem limite zero. Ambas divergem. A segunda conclusão concorda com a análise anterior das somas parciais, mas exige menos cálculo. Antes de escolher um teste mais elaborado, verificar o termo geral pode encerrar o problema.

Exemplo 8.6.

Prove que a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, embora $1/n \to 0$.

Solução. Agrupamos apenas uma soma finita em blocos cujos comprimentos dobram:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots .$$

O bloco dos índices $2^{j-1} + 1$ até 2^j contém 2^{j-1} parcelas, cada uma no mínimo $1/2^j$. Sua soma é no mínimo $1/2$. Portanto

$$S_{2^m} \geqslant 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Como todas as parcelas são positivas, a sequência completa de somas parciais também tende a $+\infty$. Os termos diminuem até zero, mas sua soma acumulada não fica limitada.

Retirar ou alterar um número finito de parcelas não muda a convergência: a partir do último índice alterado, as somas parciais diferem por uma constante. Isso permite aplicar critérios a partir de um índice conveniente, desde que os termos iniciais estejam definidos. Para duas séries convergentes, a linearidade segue das somas parciais: $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$. Não usamos essa regra para subtrair duas somas divergentes.

8.4 Séries positivas e comparação

Quando $a_n \geqslant 0$, as somas parciais são crescentes. Pelo teorema da convergência monótona, a série converge exatamente quando suas somas parciais são limitadas superiormente. Essa observação transforma desigualdades entre termos em informações sobre séries.

Teorema 8.1. *Comparação direta.*

Suponha $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ a partir de certo índice. Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

Demonstração. Podemos retirar os termos anteriores ao índice em que vale a desigualdade. As somas parciais de a_n ficam entre zero e as de b_n. Se estas são limitadas, aquelas também são. A segunda afirmação é a contrapositiva da primeira. □

Exemplo 8.7.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+3n)$ convergem.

Solução. Para provar convergência por comparação direta, buscamos uma série convergente cujas parcelas sejam maiores. A expressão $1/[n(n+1)]$, que acabamos de somar, é próxima de $1/n^2$. Ela é menor que $1/n^2$, mas multiplicá-la por dois produz uma majorante. Com efeito, para $n \geqslant 1$,

$$n+1 \leqslant 2n \quad\Longrightarrow\quad n(n+1) \leqslant 2n^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}.$$

Na passagem aos recíprocos usamos a positividade dos denominadores. Além disso, $n^2+3n \geqslant n^2 > 0$. Juntando as desigualdades,

$$0 < \frac{1}{n^2+3n} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)},$$

pois $n+1 \leqslant 2n$. A série da direita tem soma 2, pelo Exemplo 8.3. A comparação prova a convergência das duas séries. Saber apenas que $1/n^2 \leqslant 1/n$ não bastaria: estar abaixo de uma série divergente não decide nada.

Teorema 8.2. *Comparação pelo limite.*

Se $a_n, b_n > 0$ a partir de certo índice e $a_n/b_n \to L$, com $0 < L < +\infty$, então $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou divergem simultaneamente.

Demonstração. Para índices suficientemente grandes, $L/2 < a_n/b_n < 3L/2$. Logo

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n.$$

As duas comparações diretas fornecem as duas implicações. □

Se o limite da razão for zero, a convergência de $\sum b_n$ ainda implica a de $\sum a_n$, pois eventualmente $a_n \leqslant b_n$. Se o limite for $+\infty$, a divergência de $\sum b_n$ implica a de $\sum a_n$. As implicações inversas não decorrem desses casos. Por exemplo, $(1/n^2)/(1/n) \to 0$, mas as duas séries têm classificações diferentes.

Exemplo 8.8.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$.

Solução. O numerador tem grau um e o denominador tem grau três. Dividir por essas potências separa um fator $1/n^2$:

$$a_n = \frac{3n+1}{n^3+2} = \frac{n(3+1/n)}{n^3(1+2/n^3)} = \frac{1}{n^2}\frac{3+1/n}{1+2/n^3}.$$

O último fator tende a 3. Por isso escolhemos $b_n = 1/n^2$, cuja série já sabemos ser convergente. A conferência exigida pelo teorema é

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3n^3+n^2}{n^3+2} = \frac{3+1/n}{1+2/n^3} \longrightarrow 3.$$

Os termos são positivos e o limite está entre zero e infinito. Portanto a série converge. Não precisamos calcular sua soma para estabelecer a convergência.

Exemplo 8.9.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Solução. Como $n > 0$, o termo é $1/[n\sqrt{1+1/n}]$. A comparação com $b_n = 1/n$ dá

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \longrightarrow 1.$$

A série harmônica diverge; logo a série dada também diverge. A raiz no denominador não produz uma potência quadrática: o crescimento dominante é linear em n.

Exemplo 8.10.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(1/n))$.

Solução. Os termos são positivos. Taylor em zero fornece $1-\cos x = x^2/2 + o(x^2)$. Substituindo $x = 1/n$,

$$\frac{1-\cos(1/n)}{1/n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Logo a série converge por comparação com $\sum 1/n^2$. Também seria possível usar a desigualdade $0 \leqslant 1-\cos x \leqslant x^2/2$, obtida de $1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2(x/2)$ e $|\operatorname{sen} u| \leqslant |u|$. A expansão explica a ordem exata; a desigualdade já basta para a convergência.

Exemplo 8.11.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$.

Solução. Cada termo é positivo e tende a zero. Racionalizar revela sua escala:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}, \qquad \frac{a_n}{1/n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Assim, a série diverge como a harmônica. O limite zero dos termos é compatível com essa divergência; a comparação determina quão lentamente eles diminuem.

8.5 O teste da integral e o tamanho da cauda

Quando o termo geral é o valor de uma função positiva e decrescente nos inteiros, os retângulos de largura um permitem comparar a soma com uma área. A comparação fornece tanto um critério de convergência quanto uma estimativa para as parcelas que ainda não foram somadas.

Teorema 8.3. *Teste da integral.*

Se f é contínua, positiva e não crescente em $[n_0, +\infty)$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ converge se, e somente se, $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. No caso convergente, a cauda após o índice $N \geqslant n_0$ satisfaz

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_N \leqslant \int_{N}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Para $x \in [n, n+1]$, a monotonicidade dá $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. Integrando e somando em intervalos consecutivos, obtemos

$$\int_{n_0}^{M+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=n_0}^{M} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Assim, as somas parciais são limitadas exatamente quando as integrais truncadas são limitadas. Todas são crescentes, por positividade, e a convergência equivale à limitação. Para a cauda, somamos as desigualdades dos retângulos a partir de $n = N+1$:

$$\int_{N+1}^{M+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} f(n) \leqslant \int_{N}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Passando ao limite em M, chegamos às desigualdades anunciadas. □

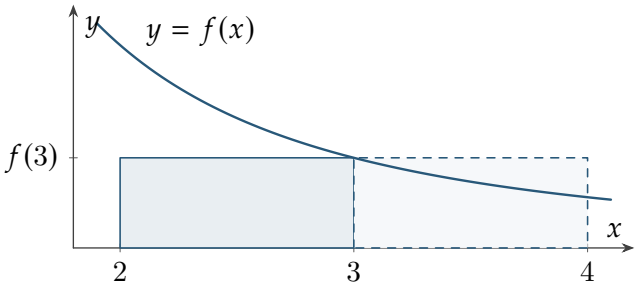


Figura 104: Para $f(x) = 1/x^2$, o retângulo de altura $f(3)$ fica abaixo da curva em $[2,3]$ e acima dela em $[3,4]$. Assim, $\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(3) \leqslant \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

As hipóteses podem valer apenas a partir de certo índice. Nesse caso, separamos os termos anteriores. A integral não fornece, em geral, a soma da série: as áreas dos retângulos são comparadas com a área sob a curva, não identificadas com ela.

Exemplo 8.12.

Classifique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, para $p \in \mathbb{R}$.

Solução. Se $p \leqslant 0$, os termos não tendem a zero, e a série diverge. Para $p > 0$, a função x^{-p} é positiva, contínua e decrescente. Se $p \neq 1$,

$$\int_1^b x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Se $p > 1$, o expoente $1-p$ é negativo e $b^{1-p} \to 0$. O limite da integral é $(-1)/(1-p) = 1/(p-1)$. Se $0 < p < 1$, o expoente é positivo e o quociente tende a $+\infty$. Para $p = 1$, calculamos separadamente $\int_1^b \mathrm{d}x/x = \ln b \to +\infty$. Portanto a **série** p converge se, e somente se, $p > 1$.

O número $p = 1$ é a fronteira. Não basta que a potência do denominador seja positiva; ela precisa ser maior que um.

Exemplo 8.13.

Para quais valores de p converge $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$?

Solução. O início em $n = 2$ evita $\ln 1 = 0$. Para todo $p \in \mathbb{R}$, o termo é positivo e tende a zero. O produto $x(\ln x)^p$ no denominador sugere uma substituição logarítmica na integral. Antes de aplicá-la, verificamos a monotonicidade da função associada:

$$f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2(\ln x)^{p+1}}.$$

Logo ela é decrescente quando $\ln x + p > 0$. Isso ocorre a partir de algum ponto, mesmo se $p < 0$. Escolha um inteiro $m \geqslant 2$ a partir do qual essa condição vale. Com $u = \ln x$, temos $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$; os extremos m e b passam a $\ln m$ e $\ln b$. Assim,

$$\int_m^b \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln m}^{\ln b} u^{-p}\,\mathrm{d}u.$$

Para $p \neq 1$, a última integral é $\big((\ln b)^{1-p} - (\ln m)^{1-p}\big)/(1-p)$. Ela tem limite finito exatamente quando $p > 1$. Para $p = 1$, vale $\ln\ln b - \ln\ln m \to +\infty$. Os termos anteriores a m são em número finito. Portanto a série converge exatamente para $p > 1$. O fator logarítmico pode decidir a convergência na fronteira da série harmônica, mas uma única potência $\ln n$ ainda não basta.

Exemplo 8.14.

Classifique $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,(\ln\ln n)^p}$.

Solução. Para $n \geqslant 3$, temos $\ln\ln n > 0$, de modo que qualquer potência real está definida. A função positiva correspondente é eventualmente decrescente, pois

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{p}{\ln x\,\ln\ln x}\right) < 0$$

para x suficientemente grande, pois o fator entre parênteses tende a 1. A derivada de $\ln\ln x$ é $1/(x\ln x)$, que aparece exatamente no integrando. Fazendo $u = \ln\ln x$, temos $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/(x\ln x)$ e obtemos, a partir de um inteiro m onde valem as hipóteses,

$$\int_m^b \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\,(\ln\ln x)^p} = \int_{\ln\ln m}^{\ln\ln b} u^{-p}\,\mathrm{d}u.$$

O extremo superior tende a $+\infty$. A integral de u^{-p} já foi calculada no exemplo anterior e converge exatamente para $p > 1$. Logo esse é também o critério para a série. As substituições acompanham as derivadas dos logaritmos.

Exemplo 8.15.

Use as dez primeiras parcelas de $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ para obter um intervalo que contenha a soma e uma aproximação com erro inferior a $0{,}005$.

Solução. O resto começa no termo de índice 11. A integral que fica abaixo desse resto também começa em 11, enquanto a que fica acima dele começa em 10. Como

$$\int_c^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c},$$

o teste fornece

$$\frac{1}{11} \leqslant R_{10} \leqslant \frac{1}{10}, \qquad S_{10} + \frac{1}{11} \leqslant S \leqslant S_{10} + \frac{1}{10}.$$

O intervalo obtido tem comprimento $1/10 - 1/11 = 1/110$. Seu ponto médio fica à distância de, no máximo, metade desse comprimento de qualquer número do intervalo, inclusive de S. O acréscimo ao centro S_{10} é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{10}\right) = \frac{21}{220}.$$

Somando exatamente as dez parcelas e esse acréscimo,

$$S_{10} = \frac{1968329}{1270080}, \qquad A = S_{10} + \frac{21}{220} = \frac{22985203}{13970880},$$

o erro fica limitado pela metade do comprimento:

$$|S - A| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{220} < 0{,}005.$$

A fração A já é a aproximação certificada. Se for apresentada como $1{,}64522$, o arredondamento acrescenta menos que $0{,}000005$, mantendo o erro total abaixo de $0{,}005$. Usar apenas S_{10} permitiria garantir, por esse teste, somente um erro de no máximo $0{,}1$, valor muito maior.

Capítulo 9

Séries de potências e representações de funções

No capítulo anterior, cada série tinha parcelas numéricas e perguntávamos se suas somas parciais se aproximavam de um número. Uma expressão como $1+x+x^2+\cdots$ reúne várias dessas perguntas. Ao escolher $x = 1/2$, obtemos uma série geométrica de soma 2. Ao escolher $x = 2$, obtemos $1 + 2 + 4 + \cdots$, cujas somas parciais crescem sem limite. Os coeficientes são os mesmos, mas o valor de x decide a convergência.

Onde a série converge, sua soma define uma função de x. Queremos encontrar esse domínio, identificar a função e justificar operações como derivar ou integrar cada parcela. Começaremos pela mesma comparação de termos consecutivos já usada em séries numéricas, mantendo x fixo durante o cálculo do limite.

Os polinômios de Taylor do Capítulo 6 aproximavam uma função por somas finitas. Aqui estudaremos a passagem a uma série infinita. A existência de aproximações de qualquer ordem, por si só, não garante que essa passagem recupere a função.

9.1 Centro, raio e intervalo de convergência

Para cada $|x| < 1$, a série geométrica tem soma $1/(1 - x)$. A mesma lista de coeficientes, todos iguais a um, representa uma função de x nesse intervalo. Esse exemplo sugere estudar somas com coeficientes fixos e potências do deslocamento a partir de um centro.

Definição 9.1.

Uma **série de potências** de centro a é uma expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots ,$$

em que c_n são números reais fixos. O termo de índice zero é c_0, inclusive quando $x = a$. O conjunto dos valores reais de x para os quais a série converge é seu **conjunto de convergência**.

Para reconhecer o centro, olhamos o que é elevado à potência de índice n. Na série $\sum_{n=1}^{\infty}(x + 1)^n/(n4^n)$, por exemplo, escrevemos $x + 1 = x - (-1)$ e lemos $a = -1$. Os coeficientes são $c_n = 1/(n4^n)$ para $n \geqslant 1$, e o termo constante é zero porque a soma começa em $n = 1$. Uma constante multiplicando a potência pertence ao coeficiente. Assim, $(x - a)^n/b^n = ((x - a)/b)^n$ já sugere comparar a distância ao centro com $b > 0$.

No centro, todas as parcelas de índice positivo se anulam, portanto sempre há convergência. A estrutura em potências impõe uma forma simples aos demais pontos de convergência.

Teorema 9.1. *Raio de convergência.*

Existe R, com $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, tal que a série converge absolutamente para $|x-a| < R$ e diverge para $|x-a| > R$. Se $0 < R < +\infty$, cada extremo $a-R$ e $a+R$ precisa ser analisado separadamente.

Demonstração. Escreva $h = x - a$. Se a série converge em algum $h_0 \neq 0$, seus termos $c_n h_0^n$ tendem a zero e, portanto, são limitados em módulo por uma constante M. Para $|h| < |h_0|$,

$$|c_n h^n| \leqslant M \left|\frac{h}{h_0}\right|^n .$$

A comparação geométrica prova convergência absoluta em todos os pontos mais próximos do centro.

Se as distâncias dos pontos de convergência não são limitadas, tomamos $R = +\infty$. Caso contrário, seja R o supremo dessas distâncias, incluindo zero. Para $|h| < R$, existe um ponto de convergência de distância maior que $|h|$, e o argumento anterior se aplica. Para $|h| > R$, não pode haver convergência pela definição do supremo. A prova nada afirma quando $|h| = R$. □

Se $R = 0$, há convergência apenas no centro. Se $R = +\infty$, há convergência absoluta em toda a reta. Para um raio finito positivo, o conjunto é um intervalo que pode incluir nenhum, um ou os dois extremos.

Exemplo 9.1.

Determine o raio e o conjunto de convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n/(n4^n)$.

Solução. O centro é -1. Nesse ponto, todos os termos são zero e a série converge. Para $x \neq -1$, chamemos de $u_n(x)$ a parcela de índice n. O critério da razão compara duas parcelas consecutivas, mantendo x fixo:

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \frac{n4^n}{|x+1|^n} = \frac{|x+1|}{4}\frac{n}{n+1} \longrightarrow \frac{|x+1|}{4}.$$

Cancelamos as potências usando $|x+1|^{n+1}/|x+1|^n = |x+1|$ e $4^n/4^{n+1} = 1/4$. Para a razão-limite ser menor que um, precisamos de

$$\frac{|x+1|}{4} < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -4 < x+1 < 4 \quad\Longleftrightarrow\quad -5 < x < 3.$$

Há convergência absoluta nesse intervalo e divergência para $|x+1|>4$. Portanto o raio é $R=4$.

Nos pontos -5 e 3, o limite da razão vale um e o teste precisa ser substituído por outro argumento. Fazemos a substituição na parcela original. Em $x=3$,

$$\frac{(3+1)^n}{n4^n}=\frac{4^n}{n4^n}=\frac{1}{n},$$

e aparece a harmônica, divergente. Em $x=-5$,

$$\frac{(-5+1)^n}{n4^n}=\frac{(-4)^n}{n4^n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Os módulos $1/n$ decrescem para zero, de modo que Leibniz dá convergência. A série dos módulos é a harmônica, logo a convergência é condicional. O conjunto de convergência é $[-5,3)$. A análise dos extremos decidiu quais pontas do intervalo devem ser incluídas.

Exemplo 9.2.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n/n^2$.

Solução. No centro $x=1$, a série é nula. Para $x\neq 1$, o quociente de módulos é

$$\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{|x-1|^n}=|x-1|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\longrightarrow|x-1|.$$

A condição $|x-1|<1$ equivale a $0<x<2$, portanto o raio é 1. Em $x=0$, a série é $\sum(-1)^n/n^2$, absolutamente convergente; em $x=2$, é $\sum 1/n^2$, convergente. Assim, o conjunto de convergência é $[0,2]$, e a convergência é absoluta em todos os seus pontos.

Exemplo 9.3.

Estude $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(x+2)^n$.

Solução. O centro é -2, onde todos os termos se anulam. Fora do centro,

$$\frac{(n+1)|x+2|^{n+1}}{n|x+2|^n}=\frac{n+1}{n}|x+2|\longrightarrow|x+2|.$$

Assim, há convergência absoluta para $|x+2|<1$, ou $-3<x<-1$, e o raio é $R=1$. Em $x=-3$, o termo é $n(-1)^n$, que não tende a zero; em $x=-1$, é n, que também não tende a zero. Nenhum extremo é incluído. O conjunto de convergência é $(-3,-1)$.

Exemplo 9.4.

Determine os raios de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ e de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, adotando $0! = 1$.

Solução. Para $x \neq 0$, na primeira série usamos $(n+1)! = (n+1)n!$ e encontramos

$$\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = (n+1)|x| \longrightarrow +\infty.$$

Portanto há divergência em todo ponto diferente do centro; em zero, a soma é 1. O raio é $R = 0$.

Na segunda, o fatorial está no denominador. Para $x \neq 0$,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Em zero, apenas o termo constante permanece. Há convergência absoluta em toda a reta, logo $R = +\infty$. Até aqui, a convergência está provada; identificar essa soma com e^x requer ainda uma justificativa, que daremos usando o resto de Taylor.

Quando o limite $\lim |c_{n+1}/c_n| = L$ existe e os coeficientes não se anulam a partir de certo índice, a razão dos módulos dos termos tem limite $L|x-a|$ para $x \neq a$. No centro, a convergência já é garantida diretamente. Isso dá $R = 1/L$ para $0 < L < +\infty$, $R = +\infty$ para $L = 0$ e $R = 0$ para $L = +\infty$. É uma ferramenta de cálculo do raio, não sua definição. Coeficientes nulos intercalados podem tornar essa razão inutilizável sem impedir o estudo da série.

Capítulo 10

Métodos numéricos para raízes e integrais

Neste capítulo, aproximaremos a raiz de $x^3 - x - 1 = 0$ em $[1, 2]$ e integrais como $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Em ambos os casos, queremos obter um valor numérico e saber quanto ele pode se afastar do valor exato. Os métodos de aproximação precisam, portanto, fornecer também uma estimativa garantida para o erro.

Os métodos deste capítulo usam contas que podem ser feitas com calculadora. A questão central é decidir quando parar: quantas divisões de um intervalo, quantas iterações ou quantos valores da função bastam para a precisão desejada. Uma tabela de números próximos ajuda a observar o processo; uma desigualdade de erro é o que permite certificar o resultado.

10.1 O que significa conhecer uma aproximação

Um erro de $0{,}01$ unidade representa apenas a fração $\frac{0{,}01}{1000} = 10^{-5}$ de uma medida de mil unidades, mas metade de uma medida de $0{,}02$ unidade. Para avaliar uma aproximação, podemos considerar tanto a distância ao valor exato quanto a proporção que essa distância representa na medida.

Se A aproxima um valor exato α, o **erro absoluto** é $|A - \alpha|$. Ele permite comparar o erro com uma tolerância nas unidades do problema. Para comparar com a escala do valor procurado, dividimos essa distância por $|\alpha|$: o **erro relativo** é $\frac{|A-\alpha|}{|\alpha|}$, definido quando $\alpha \neq 0$. Se o valor exato é zero, usamos o erro absoluto, pois essa divisão não está definida.

Em geral, não conhecemos α, mas podemos provar que $|A - \alpha| \leqslant E$. Isso fornece o intervalo $[A-E, A+E]$. Para certificar casas decimais arredondadas, verificamos se todo esse intervalo arredonda para o mesmo decimal. A condição $E < \frac{1}{2}\,10^{-d}$, sozinha, não basta se o intervalo atravessar uma fronteira de arredondamento.

O **erro de truncamento** nasce de interromper um processo: usar uma soma finita, uma malha finita ou poucas iterações. O **erro de arredondamento** nasce de substituir números por representações decimais finitas nas contas. Se a aproximação exata do método é A, mas exibimos $\widetilde{A}$, então

$$|\alpha - \widetilde{A}| \leqslant |\alpha - A| + |A - \widetilde{A}|.$$

As duas fontes de erro precisam caber na tolerância final. Nas tabelas deste capítulo, os decimais servem à leitura; quando a certificação usa frações exatas, isso será indicado.

10.2 Bisseção: conservar um intervalo com uma raiz

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, existe uma raiz nesse intervalo. O ponto médio $m = (a + b)/2$ divide o intervalo em duas metades. Se $f(m) = 0$, encontramos a raiz. Caso contrário, conservamos a metade cujos extremos têm sinais opostos. A continuidade garante que essa metade ainda contém uma raiz.

Repetindo o processo, obtemos intervalos fechados encaixados $[a_k, b_k]$, com

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

Aqui, k conta as bisseções já realizadas; $k = 0$ corresponde ao intervalo inicial. Os comprimentos tendem a zero, portanto os intervalos localizam um único número α. Pela continuidade e pelos sinais dos extremos, $f(\alpha) = 0$. Mesmo que o intervalo inicial contenha mais de uma raiz, o processo seleciona uma delas.

O ponto médio do intervalo resultante satisfaz

$$|m_k - \alpha| \leqslant \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

O denominador tem $k + 1$, porque o erro é no máximo metade do comprimento. Para garantir erro menor que ε, basta escolher k com $(b - a)/2^{k+1} < \varepsilon$.

Exemplo 10.1.

Aproxime a raiz de $f(x) = x^3 - x - 1$ em $[1, 2]$, por bisseção, com erro inferior a 10^{-3}.

Solução. Temos $f(1) = -1$, $f(2) = 5$, e f é contínua. Além disso, $f'(x) = 3x^2 - 1 \geqslant 2$ nesse intervalo, de modo que a raiz é única. Como o comprimento inicial é um, precisamos de $2^{k+1} > 1000$. O menor k que atende a essa condição é 9.

Os pontos médios são racionais com denominadores potências de dois, permitindo determinar os sinais exatamente:

k	$[a_k, b_k]$	m_k	sinal de $f(m_k)$
0	$[1, 2]$	$3/2$	$+$
1	$[1, 3/2]$	$5/4$	$-$
2	$[5/4, 3/2]$	$11/8$	$+$
3	$[5/4, 11/8]$	$21/16$	$-$
4	$[21/16, 11/8]$	$43/32$	$+$
5	$[21/16, 43/32]$	$85/64$	$+$
6	$[21/16, 85/64]$	$169/128$	$-$
7	$[169/128, 85/64]$	$339/256$	$-$
8	$[339/256, 85/64]$	$679/512$	$+$
9	$[339/256, 679/512]$	$1357/1024$	$+$

Por exemplo, $f(5/4) = 125/64 - 5/4 - 1 = -19/64 < 0$, o que explica a segunda escolha. Ao final,

$$A = m_9 = \frac{1357}{1024} = 1{,}3251953125, \qquad |A - \alpha| \leqslant \frac{1}{1024} < 10^{-3}.$$

O sinal da última linha é informação adicional; a precisão já decorre do intervalo após nove bisseções. O decimal de A é exato.

10.3 Resíduo e erro na raiz

Ao substituir uma aproximação x na equação, obtemos o **resíduo** $f(x)$. Um resíduo pequeno diz que o valor da função está perto de zero; não diz, sozinho, quanto x está distante da raiz.

Se $f(\alpha) = 0$ e $|f'(t)| \geqslant m > 0$ em todo o segmento entre x e α, o Teorema do Valor Médio fornece

$$|f(x)| = |f(x) - f(\alpha)| = |f'(\xi)|\,|x - \alpha| \geqslant m|x - \alpha|.$$

Logo $|x - \alpha| \leqslant |f(x)|/m$. A desigualdade $|f'(t)| \geqslant m > 0$ transforma um erro vertical em um erro horizontal. É preciso localizar os dois pontos em um intervalo onde essa desigualdade seja válida.

Exemplo 10.2.

Para $f(x) = 10^{-6}(x - 2)$, a aproximação $x = 3$ produz resíduo 10^{-6}. Determine o erro dessa aproximação e explique o que o resíduo permite concluir.

Solução. A raiz é $\alpha = 2$, portanto o erro é 1, apesar do resíduo pequeno. A derivada vale 10^{-6}, e a estimativa correta dá

$$|3 - 2| \leqslant \frac{|f(3)|}{10^{-6}} = 1.$$

A pequena escala da função explica o resíduo. Multiplicar uma equação por uma constante não nula não altera suas raízes, mas pode reduzir arbitrariamente seus resíduos. Por isso, um critério de parada baseado apenas em $|f(x)|$ precisa de uma informação adicional, como $|f'| \geqslant m > 0$, para certificar a distância à raiz.

10.4 Newton e secante

O método de Newton, introduzido na Seção 3.7, substitui o gráfico pela tangente no ponto atual e toma sua interseção com o eixo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0.$$

A convergência não é automática. Uma situação em que podemos prová-la é a seguinte: f é duas vezes continuamente diferenciável em $[a, b]$, $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ e $f'' \geqslant 0$ nesse intervalo. Começamos em $x_0 = b$.

Há uma única raiz $\alpha \in (a, b)$. A convexidade coloca o gráfico acima da tangente, portanto

$$0 = f(\alpha) \geqslant f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n),$$

o que dá $x_{n+1} \geqslant \alpha$. Se $x_n > \alpha$, temos $f(x_n) > 0$ e $x_{n+1} < x_n$. As iteradas permanecem em $[\alpha, b]$, decrescem e convergem. Como a derivada é positiva e contínua nesse intervalo fechado, seu limite na recorrência não é zero; passar ao limite mostra que o limite das iteradas é a raiz.

Se ainda $f' \geqslant m > 0$ e $|f''| \leqslant M$, Taylor entre x_n e α fornece

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Reorganizando,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|^2.$$

Essa redução proporcional ao quadrado do erro é chamada **convergência quadrática**. Ela explica a rapidez perto de uma raiz simples, mas depende das hipóteses e de um ponto inicial adequado.

Quando calcular a derivada é inconveniente, podemos substituir $f'(x_n)$ pela inclinação entre dois pontos anteriores. Isso produz o **método da secante**:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Ele requer dois valores iniciais e denominador não nulo. Cada nova etapa aproveita o valor de função anterior e precisa de uma nova avaliação. A fórmula, sozinha, não garante convergência nem preservação de um intervalo com mudança de sinal. As estimativas de erro por resíduo continuam disponíveis quando conseguimos verificar suas hipóteses para a aproximação obtida.

Exemplo 10.3.

Retome $f(x) = x^3 - x - 1$. Use Newton a partir de $x_0 = 3/2$ para obter erro inferior a 10^{-6}. Compare com a secante iniciada em 1 e $3/2$.

Solução. No intervalo $[1, 3/2]$, a função muda de sinal, $f' \geqslant 2$ e $0 < f'' \leqslant 9$. As condições de convergência de Newton estão satisfeitas. A recorrência se simplifica para

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}.$$

As três primeiras aproximações exatas são

$$x_1 = \frac{31}{23}, \qquad x_2 = \frac{71749}{54142}, \qquad x_3 = \frac{448712783118393}{338723203112569}.$$

Como x_3 e a raiz pertencem ao intervalo em que $f' \geqslant 2$, a substituição dessa fração na função dá

$$0 < x_3 - \alpha \leqslant \frac{f(x_3)}{2} < 5 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

O valor $1{,}3247182$, arredondado de x_3, acrescenta menos que $5 \cdot 10^{-8}$ de erro e também atende à tolerância.

Na secante, o primeiro novo ponto é

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{7}{8}\,\frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{7}{8} - (-1)} = \frac{19}{15}.$$

Ele fica abaixo da raiz, ao contrário das iteradas de Newton deste exemplo. A tabela exibe quatro atualizações de Newton, a partir de x_0, e cinco da secante, após seus dois valores iniciais. Os decimais foram arredondados somente para exibição.

Índice	Newton	Secante
0	1,5000000000	1,0000000000
1	1,3478260870	1,5000000000
2	1,3252003990	1,2666666667
3	1,3247181740	1,3159616733
4	1,3247179572	1,3252141140
5		1,3247138858
6		1,3247179554

Todas as aproximações da secante exibidas estão em $[1, 3/2]$. Para a de índice seis, a conta com as iteradas racionais exatas dá $|f(x_6)|/2 < 5 \cdot 10^{-9}$, certificando seu erro. Newton atingiu a tolerância pedida já na terceira atualização. Em cada uma delas, foi preciso calcular também a derivada. A secante reaproveitou dois valores de função, enquanto a bisseção permitiu estimar o erro antecipadamente a partir da largura do intervalo. Por isso, o número de atualizações é apenas uma das medidas de custo.

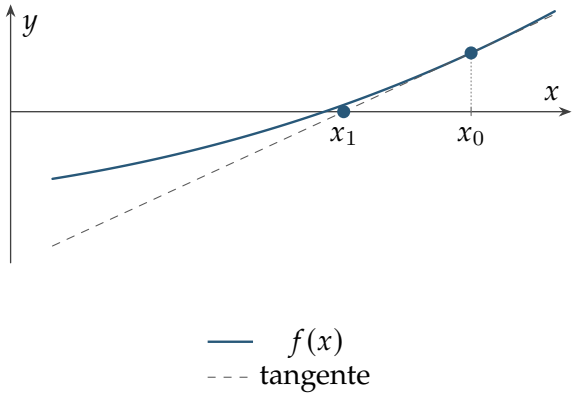


Figura 107: Para $x^3 - x - 1$, a tangente em $x_0 = 3/2$ encontra o eixo em $x_1 = 31/23$, ainda à direita da raiz.

Exemplo 10.4.

Estude Newton para $f(x) = (x-2)^4$, com $x_0 \neq 2$. Explique por que a convergência não é quadrática.

Solução. Para $x_n \neq 2$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-2)^4}{4(x_n-2)^3} = x_n - \frac{x_n-2}{4}, \qquad x_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}(x_n - 2).$$

Logo $x_n - 2 = (3/4)^n(x_0 - 2)$, que nunca se anula em uma etapa finita, mas tende a zero. O erro é multiplicado por $3/4$ a cada etapa: a convergência é **linear**, isto é, proporcional ao erro anterior, em vez de ao seu quadrado.

A raiz tem multiplicidade quatro e $f'(2) = 0$. Não existe $m > 0$ tal que $|f'| \geqslant m$ em uma vizinhança que contenha a raiz, portanto a estimativa quadrática anterior não se aplica. Também não há mudança de sinal ao atravessar 2. Uma raiz pode existir mesmo quando a condição de bisseção não é satisfeita.

As iterações também podem sair do domínio. Para $f(x) = \ln x$, começar Newton em $x_0 = 4$ dá $x_1 = 4 - 4\ln 4 < 0$, pois $\ln 4 > 1$. O logaritmo deixa de estar definido na etapa seguinte. O ciclo do Exemplo 3.41 mostra outra forma de falha, mesmo com todas as divisões permitidas. Uma alternativa prática é manter um intervalo com mudança de sinal e aceitar uma etapa de Newton ou secante somente quando ela permanece nesse intervalo e produz uma redução adequada. Caso contrário, executamos uma bisseção. A estimativa de erro baseada no intervalo preservado continua válida.

Capítulo 11

Curvas paramétricas e coordenadas polares

Uma equação $y = f(x)$ descreve bem muitos gráficos, mas não registra o sentido de um movimento e não representa uma circunferência inteira por uma única função. Para acompanhar um ponto que se move, é mais natural dar suas duas coordenadas em função de um parâmetro. Para descrever uma região em torno de um centro, muitas vezes é mais simples usar distância e ângulo.

Essas escolhas não mudam os conceitos de tangente, área e comprimento. Elas mudam as expressões que entram nas derivadas e nas integrais. Antes de calcular, será necessário determinar qual parte da curva é percorrida, em que sentido e quantas vezes.

11.1 Descrever a posição de um ponto

Uma **parametrização plana** é um par de funções $x = x(t)$, $y = y(t)$, definido em um intervalo de valores de t. Cada valor do parâmetro determina um ponto $(x(t), y(t))$. O conjunto desses pontos é o traçado da curva; a ordem em que aparecem determina a orientação. Quando t representa tempo, as derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ são as componentes da velocidade, e

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

é a rapidez, ou módulo da velocidade. A mesma curva pode ser percorrida com rapidez ou orientação diferentes.

Exemplo 11.1.

Parametrize o segmento de $A = (1, -1)$ a $B = (4, 5)$, nesse sentido. Dê também uma parametrização no sentido contrário.

Solução. O deslocamento de A para B é $(3, 6)$. Tomar uma fração t desse deslocamento fornece

$$x(t) = 1 + 3t, \qquad y(t) = -1 + 6t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Em $t = 0$, estamos em A; em $t = 1$, em B. Eliminar $t = (x - 1)/3$ dá $y = 2x - 3$, com $1 \leqslant x \leqslant 4$. Sem essa restrição, a equação representaria a reta inteira.

Para inverter a orientação, substituímos t por $1-t$: $x = 4-3t$, $y = 5-6t$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$. O conjunto de pontos é o mesmo, mas os extremos inicial e final se trocam.

Exemplo 11.2.

Descreva o percurso $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Compare-o com $x = 3\cos(2u)$, $y = 2\operatorname{sen}(2u)$, para $0 \leqslant u \leqslant \pi$.

Solução. Dividindo as coordenadas por seus fatores e usando $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, obtemos $x^2/9 + y^2/4 = 1$. A primeira parametrização parte de $(3, 0)$, passa por $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(0, -2)$ e retorna ao ponto inicial. Ela percorre a elipse uma vez no sentido anti-horário.

A rapidez é $v(t) = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}$, que varia entre dois e três. Na segunda parametrização, $t = 2u$: o mesmo percurso é realizado em metade do intervalo de parâmetro, com rapidez $2v(2u)$. Se deixássemos u variar até 2π, a elipse seria percorrida duas vezes. A equação cartesiana não distingue essas situações.

Exemplo 11.3.

Analise $x = t^2$, $y = t^4$, para $-1 \leqslant t \leqslant 1$. A eliminação do parâmetro descreve todo o percurso?

Solução. Temos $y = x^2$, mas apenas $0 \leqslant x \leqslant 1$. Quando t cresce de -1 a zero, o ponto vai de $(1, 1)$ à origem; quando cresce de zero a um, retorna pelo mesmo arco. Cada ponto interior é visitado duas vezes, uma em cada sentido.

As derivadas $x' = 2t$ e $y' = 4t^3$ se anulam simultaneamente em zero. Isso não impede a existência da tangente: pela equação $y = x^2$, ela é o eixo x. O que se anula nesse instante é a velocidade da parametrização. A equação cartesiana registra o arco, mas perde a informação de retorno.

11.2 Tangentes e segunda derivada

Suponha x, y continuamente diferenciáveis. Se $x'(t_0) \neq 0$, a coordenada x pode ser usada como variável perto de t_0. Pela regra da cadeia, $y'(t) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)x'(t)$, portanto

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Uma tangente é horizontal quando $y' = 0$ e $x' \neq 0$. É vertical quando $x' = 0$ e $y' \neq 0$: nesse caso, aplicamos o mesmo argumento a x como função de y. Se ambas as derivadas se anulam, nenhum desses testes decide a tangente. É preciso estudar o traçado ou o limite das direções secantes.

Para funções duas vezes diferenciáveis e $x' \neq 0$, derivar em relação a x significa derivar em relação a t e dividir por x'. Logo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}.$$

Em geral, essa expressão não é y''/x''.

Exemplo 11.4.

Para $x = t^3 - 3t$, $y = t^2$, determine as tangentes horizontais e verticais, a concavidade onde $x' \neq 0$ e as duas tangentes no ponto de cruzamento $(0, 3)$.

Solução. Temos $x' = 3(t^2 - 1)$ e $y' = 2t$. A tangente horizontal ocorre em $t = 0$, na origem, e é $y = 0$, pois $x'(0) = -3$. As verticais ocorrem em $t = 1$ e $t = -1$, onde $y' \neq 0$. Os pontos são $(-2, 1)$ e $(2, 1)$, com tangentes $x = -2$ e $x = 2$.

Para $t \neq \pm 1$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2t}{3(t^2-1)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{3(t^2-1)}\,\frac{-2(t^2+1)}{3(t^2-1)^2} = -\frac{2(t^2+1)}{9(t^2-1)^3}.$$

Assim, cada trecho que é gráfico em x tem concavidade para cima se $|t| < 1$ e para baixo se $|t| > 1$. Essa descrição é local: a curva inteira não é gráfico de uma única função de x.

No cruzamento, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$ produzem o mesmo ponto. As inclinações são, respectivamente, $1/\sqrt{3}$ e $-1/\sqrt{3}$. As tangentes são

$$y - 3 = \frac{x}{\sqrt{3}}, \qquad y - 3 = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Um ponto geométrico pode, portanto, corresponder a dois instantes e a duas direções de passagem.

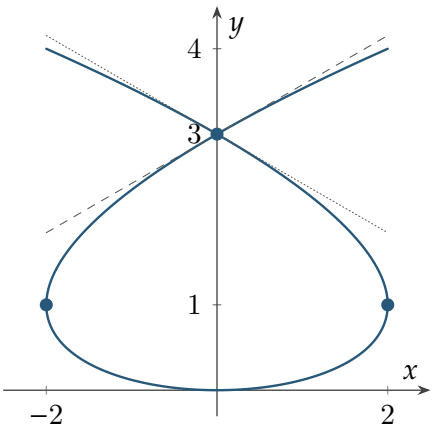


Figura 108: A curva $(t^3 - 3t, t^2)$ cruza a si mesma em $(0, 3)$. As duas passagens têm tangentes distintas. Os pontos $(-2, 1)$ e $(2, 1)$ têm tangentes verticais.

Exemplo 11.5.

Determine a tangente na origem da curva $x = t^2$, $y = t^3$, com $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Solução. Na origem, $x' = 2t$ e $y' = 3t^2$ se anulam. Para $t \neq 0$, a reta que liga a origem ao ponto da curva tem inclinação

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3}{t^2} = t \longrightarrow 0.$$

Portanto a tangente é $y = 0$. A equação eliminada é $y^2 = x^3$, com $0 \leqslant x \leqslant 1$; os trechos $y = \pm x^{3/2}$ se encontram na origem. Esse encontro pontudo, com retorno da direção de movimento, é chamado **cúspide**. A existência da tangente foi provada por secantes, sem dividir por uma derivada nula.

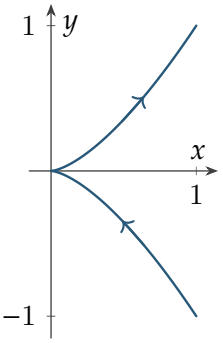


Figura 109: Em (t^2, t^3), os dois trechos têm a mesma tangente na origem. As setas indicam o percurso para t crescente.

11.3 Comprimento e área: o intervalo faz parte da conta

Em um pequeno intervalo de parâmetro Δt, os deslocamentos são aproximadamente $x'(t)\Delta t$ e $y'(t)\Delta t$. Pitágoras sugere um comprimento $\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\Delta t$. Para uma parametrização continuamente diferenciável, a soma dos comprimentos dos segmentos inscritos converge para

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Para justificar o limite, escreva $\mathbf{u}(t) = (x'(t), y'(t))$ para o vetor velocidade e use $\|\cdot\|$ para seu módulo. Considere uma divisão $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, com larguras $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, e seja $h = \max_j \Delta t_j$ a maior dessas larguras. Queremos controlar quanto a velocidade pode variar dentro de qualquer subintervalo. Para isso, definimos

$$\omega(h) = \max\bigl\{\|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t)\| : s, t \in [a,b],\ |s - t| \leqslant h\bigr\}.$$

Esse **módulo de continuidade** mede a maior variação do vetor velocidade entre instantes distantes no máximo h. Como $\mathbf{u}$ é contínua no intervalo fechado, ela é uniformemente contínua; portanto $\omega(h) \to 0$ quando $h \to 0$.

Escolha $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ e denote por $\Delta\mathbf{r}_j$ o vetor deslocamento entre as extremidades desse subintervalo. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, aplicado a cada coordenada, $\Delta\mathbf{r}_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t$, onde integramos cada componente do vetor. Logo

$$\big\|\Delta\mathbf{r}_j - \mathbf{u}(\tau_j)\Delta t_j\big\| \leqslant \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(\tau_j)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \omega(h)\Delta t_j.$$

Pela desigualdade triangular, a diferença entre os módulos de dois vetores não supera o módulo de sua diferença. Somando as estimativas, obtemos

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \|\Delta\mathbf{r}_j\| - \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{u}(\tau_j)\|\Delta t_j\right| \leqslant \omega(h)(b-a) \longrightarrow 0.$$

A primeira soma é o comprimento da linha poligonal inscrita; a segunda é uma soma de Riemann da rapidez $\|\mathbf{u}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Esta converge para a integral indicada, o que prova a fórmula do comprimento.

A integral mede o comprimento *percorrido*. Se o mesmo arco é percorrido duas vezes, ele entra duas vezes. Inverter a orientação não muda o comprimento, pois a rapidez é não negativa.

Para área, a substituição $x = x(t)$ fornece $\int y\,\mathrm{d}x = \int y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$ em cada trecho em que x é monótona. Os sinais registram a orientação. Em uma curva fechada simples percorrida no sentido anti-horário, formada por um gráfico superior e um inferior,

$$-\oint y\,\mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (y_{\sup} - y_{\inf})\,\mathrm{d}x = A.$$

O símbolo $\oint$ indica que somamos as integrais ao longo de um percurso fechado. O trecho inferior vai da esquerda para a direita e o superior faz o caminho contrário. A fórmula continua válida para fronteiras que possam ser divididas em um número finito desses trechos. Uma travessia repetida ou um cruzamento exige separar as regiões; não se deve tomar essa integral como área geométrica automaticamente.

Exemplo 11.6.

Um ponto de uma circunferência de raio $a > 0$, que rola sem deslizar sobre uma reta, descreve a cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Estude um arco, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$: tangentes, comprimento e área entre o arco e o eixo x.

Solução. Ao girar um ângulo t, o centro avança at, pois não há deslizamento; sua altura é a. O deslocamento do ponto em relação ao centro é $(-a\operatorname{sen} t, -a\cos t)$, explicando a parametrização.

Temos $x' = a(1 - \cos t) > 0$ no interior do arco e $y' = a \operatorname{sen} t$. Usando as identidades de arco-metade,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} = \frac{2 \operatorname{sen}(t/2) \cos(t/2)}{2 \operatorname{sen}^2(t/2)} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}.$$

A tangente é horizontal em $t = \pi$, no ponto $(a\pi, 2a)$. Nas extremidades, as duas derivadas se anulam. Para encontrar a direção da tangente na origem, comparamos $x(t)$ e $y(t)$ com os primeiros termos de suas expansões de Taylor. Escrevemos $u(t) \sim w(t)$ quando a razão $u(t)/w(t)$ tende a 1, com $w(t) \neq 0$ para t suficientemente próximo do ponto e distinto dele. Essa relação se chama *equivalência assintótica*.

Quando $t \to 0^+$, temos $x(t) \sim at^3/6$ e $y(t) \sim at^2/2$. Logo $x(t)/y(t) \sim t/3 \to 0$. A variação horizontal torna-se desprezível em relação à vertical, e a tangente é a reta $x = 0$. Pela simetria do arco, a tangente na outra extremidade é $x = 2\pi a$.

A rapidez se simplifica:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

O seno é não negativo nesse intervalo. Portanto

$$L = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \mathrm{d}t = \left[-4a \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

Como x cresce e $y \geqslant 0$, a área é

$$A = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

Usamos $\int_0^{2\pi} \cos t \, \mathrm{d}t = 0$ e $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi$. O arco é percorrido uma única vez, sem retorno.

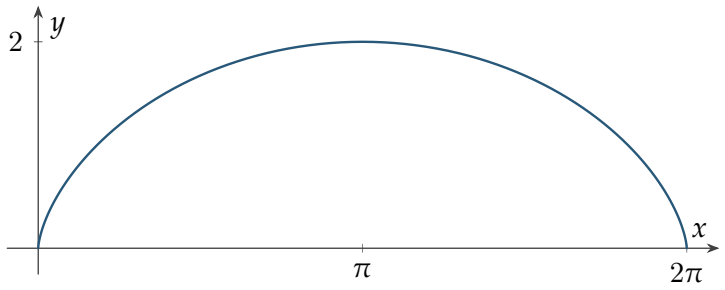


Figura 110: Um arco da cicloide, para $a = 1$. O parâmetro crescente percorre o arco da esquerda para a direita.

Exemplo 11.7.

Calcule a área da elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, com $a, b > 0$ e $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Formule também a integral do perímetro.

Solução. A orientação é anti-horária. Logo

$$A = -\int_0^{2\pi} b\,\mathrm{sen}\,t\,(-a\,\mathrm{sen}\,t)\mathrm{d}t = ab\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,t\mathrm{d}t = \pi ab.$$

O mesmo resultado vem de $A = 4\int_0^a b\sqrt{1 - x^2/a^2}\mathrm{d}x$, seguido de $x = a\,\mathrm{sen}\,u$. A parametrização evita resolver a equação da elipse para y e dividir a fronteira em dois gráficos.

Para o perímetro, a simetria fornece

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

Se $a = b$, a rapidez é constante e $L = 2\pi a$. Para semieixos distintos, a integral já é uma formulação útil: o integrando é suave e positivo, permitindo aplicar a quadratura do Capítulo 10. Não se pode substituir a rapidez variável pela média dos semieixos sem estimar o erro dessa aproximação.

11.4 Distância, ângulo e raio com sinal

Fixamos uma origem, chamada **polo**, e o semieixo positivo de x como direção inicial. Escolhemos uma direção que forma um ângulo θ com esse semieixo. Se $r > 0$, partimos do polo e avançamos uma distância r nessa direção. As projeções horizontal e vertical desse deslocamento são $r\cos\theta$ e $r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Assim, o par polar (r, θ) representa o ponto de coordenadas cartesianas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Se $r < 0$, avançamos $|r|$ no sentido oposto ao indicado por θ. As duas projeções mudam de sinal, de modo que as mesmas fórmulas continuam válidas. Por exemplo, $(-2, \pi/6)$ representa $(-\sqrt{3}, -1)$, no terceiro quadrante: percorremos duas unidades no sentido oposto ao de $\pi/6$. Por isso,

$$(r, \theta), \quad (r, \theta + 2k\pi), \quad (-r, \theta + (2k+1)\pi)$$

representam o mesmo ponto, para todo inteiro k. No polo, qualquer ângulo serve quando $r = 0$.

Para converter um ponto cartesiano diferente da origem, podemos escolher $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ e um ângulo com cosseno x/r e seno y/r. Usar somente $\mathrm{tg}\,\theta = y/x$ perde a informação do quadrante e exige $x \neq 0$.

Uma equação $r = r(\theta)$, acompanhada de um intervalo angular, já fornece uma parametrização cartesiana. Para esboçá-la, localizamos os zeros e os sinais de r, observamos as simetrias e acompanhamos pontos intermediários. A igualdade $r(-\theta) = r(\theta)$ sugere

simetria no eixo x; outras simetrias devem ser verificadas nos pontos cartesianos, sobretudo quando há raios negativos.

Exemplo 11.8.

Identifique $r = 2a\cos\theta$, com $a > 0$. Escolha um intervalo que percorra a curva uma vez e analise o que ocorre em $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Solução. Multiplicar por r dá $r^2 = 2ar\cos\theta$, isto é,

$$x^2 + y^2 = 2ax, \qquad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Trata-se da circunferência de centro $(a, 0)$ e raio a. Nenhum ponto extra foi introduzido: fora do polo, podemos escolher a representação com $r > 0$ e recuperar a equação; o polo pertence às duas descrições.

Em $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, o raio é não negativo. O ponto parte do polo, percorre a metade inferior, passa por $(2a, 0)$, percorre a metade superior e retorna ao polo. Uma volta foi completada.

As fórmulas cartesianas esclarecem a repetição:

$$x = a(1 + \cos 2\theta), \qquad y = a\operatorname{sen} 2\theta.$$

Elas têm período π. Assim, $[0, 2\pi]$ produz duas voltas, embora a expressão $r(\theta)$ tenha período 2π. Os valores negativos de r representam pontos já visitados.

11.5 Tangentes e comprimento em polares

Derivando as coordenadas cartesianas em relação a θ, obtemos

$$x' = r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta, \qquad y' = r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta.$$

Quando $x' \neq 0$, a inclinação é y'/x'. Os testes de tangente horizontal e vertical são os mesmos da parametrização geral. Em um zero $r(\theta_0) = 0$ com $r'(\theta_0) \neq 0$, o vetor derivada é $r'(\theta_0)(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$: a tangente no polo tem direção θ_0. Se também $r' = 0$, precisamos de uma análise por limites.

Ao somar os quadrados, os termos mistos se cancelam:

$$x'^2 + y'^2 = (r')^2 + r^2.$$

Portanto, para r continuamente diferenciável, o comprimento percorrido é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

A fórmula vale para raios negativos, mas continua contando todas as passagens pelo mesmo arco.

Exemplo 11.9.

Para a espiral $r = a\theta$, com $a > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, determine a tangente no polo e o comprimento de uma volta.

Solução. O raio cresce de zero a $2\pi a$ enquanto a direção faz uma volta. A curva não é fechada: a direção final coincide com a inicial, mas a distância ao polo mudou. Em $\theta = 0$, $r = 0$ e $r' = a \neq 0$, portanto a tangente é o eixo x.

Para o comprimento,

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Uma primitiva, verificável por derivação, é

$$\frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{1+\theta^2} + \ln\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)\right).$$

Logo

$$L = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].$$

Não usamos 2π vezes um raio fixo, pois a distância ao polo varia durante o percurso.

11.6 Área de uma região radial

Um setor de raio r e ângulo $\Delta\theta$, medido em radianos, tem área $r^2\Delta\theta/2$. Para uma região formada pelos segmentos que vão do polo até uma curva $r(\theta) \geqslant 0$, aproximar a fronteira por setores fornece

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta,$$

desde que as direções descrevam a região uma única vez. Para justificar o limite, limite cada setor entre os raios mínimo e máximo da função contínua no pequeno intervalo angular. As áreas inferior e superior são somas de Riemann de $r^2/2$ e convergem para a mesma integral.

Entre duas fronteiras $0 \leqslant r_{\text{int}} \leqslant r_{\text{ext}}$, subtraímos as áreas dos setores:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(r_{\text{ext}}^2 - r_{\text{int}}^2\right)\mathrm{d}\theta.$$

Se a ordem das fronteiras muda, dividimos a integral nos ângulos de mudança. Para um trecho de raio negativo, podemos trocar r por $-r$ e θ por $\theta + \pi$; o quadrado não muda, mas devemos verificar qual região é percorrida e se há sobreposição.

Exemplo 11.10.

Esboce a cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, com $a > 0$. Determine sua tangente no polo, a área interna e o comprimento.

Solução. O raio é não negativo e a função é par, dando simetria em relação ao eixo x. Em $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, os raios são $2a, a, 0, a$. O intervalo $[0, 2\pi]$ percorre a curva uma vez, sem repetição de pontos fora do fechamento e do polo.

Em $\theta = \pi$, tanto r como r' se anulam. Escreva $\theta = \pi + h$. Como $1 - \cos h \sim h^2/2$, temos $x \sim -ah^2/2$ e $y \sim -ah^3/2$. Logo $y/x \to 0$: a tangente no polo é o eixo x, e há uma cúspide.

A área é

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}(2\pi + \pi) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Para o comprimento, $r' = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$ e

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = a\sqrt{2 + 2\cos\theta} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

O módulo é indispensável, pois o cosseno troca de sinal em $\theta = \pi$. Por simetria,

$$L = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \left[8a\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

Sem o módulo, a integral sobre uma volta daria zero, resultado incompatível com um comprimento.

Exemplo 11.11.

Para $r = 1 + 2\cos\theta$, determine o intervalo que percorre o laço interno e calcule sua área. Compare com a integral de $r^2/2$ em uma volta completa.

Solução. Os zeros ocorrem em $\theta = 2\pi/3$ e $4\pi/3$. Entre eles, $r < 0$; em $\theta = \pi$, o par $(-1, \pi)$ representa $(1, 0)$. O trecho sai do polo, passa por esse ponto e retorna ao polo, formando o laço interno à direita. Não está à esquerda, como sugeriria ignorar o sinal do raio.

Como esse laço é percorrido uma vez,

$$A_{\text{laço}} = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}(1 + 2\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta.$$

Uma primitiva de $(1 + 2\cos\theta)^2/2$ é

$$F(\theta) = \frac{3}{2}\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta.$$

Assim,

$$A_{\text{laço}} = \pi - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

O laço externo é percorrido em $[-2\pi/3, 2\pi/3]$, com raio positivo, e sua área é $2\pi+3\sqrt{3}/2$. A integral em $[0, 2\pi]$ vale 3π, a soma das duas áreas. Como o laço interno está dentro do externo, essa soma conta sua região duas vezes. A área da união das regiões delimitadas é apenas a área do laço externo; a região entre os laços tem área $\pi + 3\sqrt{3}$.

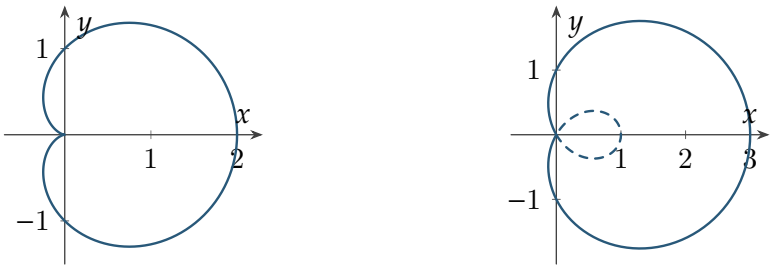


Figura 111: Cardioide $r = 1 + \cos\theta$, à esquerda, e curva com laço $r = 1 + 2\cos\theta$, à direita. O laço interno corresponde ao intervalo de raio negativo.

Exemplo 11.12.

Determine o número de pétalas e a área total das rosáceas $r = a\cos 3\theta$ e $r = a\cos 2\theta$, com $a > 0$.

Solução. Para $r = a\cos 3\theta$, uma pétala em torno do semieixo positivo de x é percorrida em $[-\pi/6, \pi/6]$: o raio parte de zero, atinge a e retorna a zero. Sua área é

$$A_1 = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2(3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Os intervalos seguintes entre zeros alternam o sinal do raio. O trecho de raio negativo $[\pi/6, \pi/2]$ produz a pétala voltada para $4\pi/3$; o seguinte produz a pétala voltada para $2\pi/3$. Essas três pétalas completam a curva em um intervalo de comprimento π. De fato, $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, e a troca simultânea de sinal e direção repete o mesmo ponto cartesiano. A área total é $3A_1 = \pi a^2/4$. Integrar de zero a 2π contaria tudo duas vezes.

Para $r = a\cos 2\theta$, a pétala da direita ocupa $[-\pi/4, \pi/4]$, com área

$$A_2 = \frac{a^2}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Os intervalos seguintes produzem as pétalas de baixo, da esquerda e de cima. Agora $r(\theta+\pi) = r(\theta)$, mas o ponto cartesiano muda para o oposto; é necessário um intervalo de comprimento 2π para completar as quatro pétalas. A área total é $4A_2 = \pi a^2/2$.

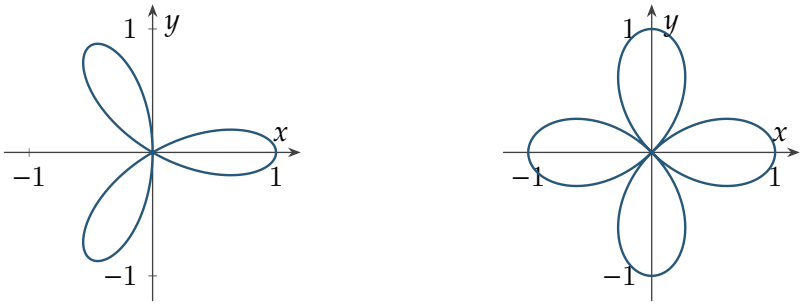


Figura 112: As rosáceas $r = \cos 3\theta$ e $r = \cos 2\theta$. O número de pétalas depende também de como os raios negativos repetem ou acrescentam pontos.

Capítulo 12

Escola Naval

12.1 Questões

12.1.1 Prova de 2026

Questão 1. (EN 2026, questão 6) Seja f uma função definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + \arccos\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$. Assinale a opção que apresenta a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas verticais que delimitam o domínio da função.

(A) $\frac{3\pi}{2}$

(B) $\frac{5\pi}{3}$

(C) $\frac{7\pi}{2}$

(D) $\frac{9\pi}{5}$

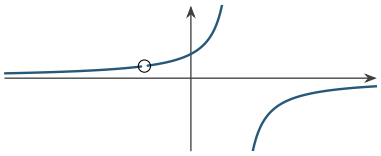
(E) $\frac{\pi}{2}$

Questão 2. (EN 2026, questão 9) Seja f uma função real definida por

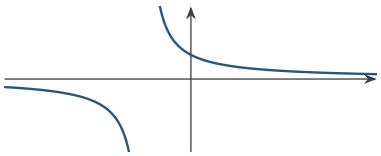
$$f(x) = -\frac{x+1}{x^2-1}.$$

Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função?

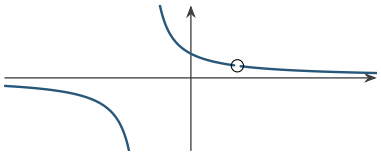
(A)



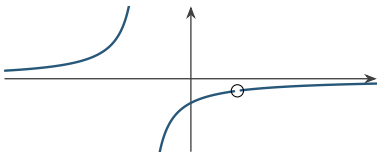
(B)



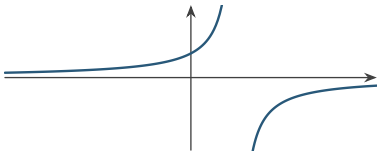
(C)



(D)



(E)



Questão 3. (EN 2026, questão 11) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)}$ e assinale a opção correta.

(A) e

(B) e^{-1}

(C) $2e^{-1}$

(D) 0

(E) $+\infty$

Questão 4. (EN 2026, questão 12) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$. Calcule o volume do sólido de revolução, em torno do eixo x, com $x \in [0; 5)$, a partir da área delimitada pelas intersecções dessas funções, e assinale a opção que apresenta o valor aproximado. Dado: $\ln(2) \approx 0{,}7$

(A) 17π

(B) 19π

(C) 21π

(D) 24π

(E) 27π

Questão 5. (EN 2026, questão 14) Sejam g e f funções reais definidas por $f(x) = x^4 - 3x^2$ e $g(x) = x^2$. Assinale a opção que apresenta o valor da área delimitada pelas intersecções das curvas.

(A) $\dfrac{128}{25}$

(B) $\dfrac{128}{15}$

(C) $\dfrac{128}{10}$

(D) $\dfrac{182}{15}$

(E) $\dfrac{182}{25}$

Questão 6. (EN 2026, questão 17) Durante o estudo de identidades algébricas, foi proposta a simplificação do polinômio a seguir, em que n é um inteiro positivo:

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

Assinale a expressão obtida após a simplificação.

(A) $(-1)^n \dfrac{(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$.

(B) $(-1)^n \dfrac{(x-1)!(x-2)\cdots(x+n)}{n!}$.

(C) $(-1)^n \dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

(D) $(-1)^n \dfrac{(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-2n)}{n!}$.

(E) $(-1)^n \dfrac{x(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

Questão 7. (EN 2026, questão 19) Calcule a integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cdot [\operatorname{cotg}(x)]^2 \, \mathrm{d}x$ e assinale a opção correta.

(A) $-\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi^2}{32}$

(B) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\pi^2}{32}$

(C) $-\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{7\pi^2}{32}$

(D) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi^2}{16}$

(E) $-\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{32}$

Questão 8. (EN 2026, questão 21) Seja f a função real definida por $f(x) = \cos(2 \arccos x)$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Esboce o gráfico de $g(x) = 1/f(x)$, indicando o domínio, as assíntotas, os pontos de interseção com os eixos e os extremos incluídos no domínio. *Questão adaptada para o formato discursivo.*

12.2 Soluções

12.2.1 Prova de 2026

Questão 1. (B)

Solução. As duas funções inversas trigonométricas exigem o mesmo argumento em $[-1, 1]$. Para $x \neq -2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 1 &\iff (2x-1)^2 \leqslant (x+2)^2 \\ &\iff 3x^2 - 8x - 3 \leqslant 0 \\ &\iff (3x+1)(x-3) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Como o produto é não positivo entre suas raízes, o domínio é $[-1/3, 3]$, que não contém -2.

Para $u \in [-1, 1]$, os valores principais satisfazem $\operatorname{arcsen} u + \arccos u = \pi/2$. Portanto, $f(x) = \pi/2$ em todo o domínio.

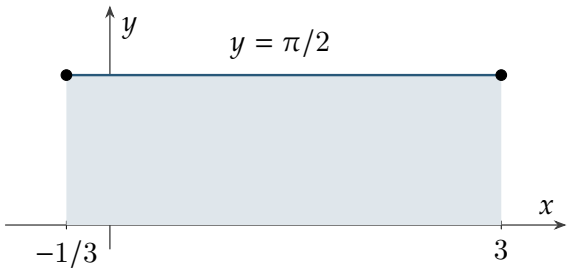


Figura 119: A região pedida é um retângulo: o domínio determina sua base.

A área é

$$A = \int_{-1/3}^{3} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}.$$

Questão 2. (A)

Solução. O denominador original é $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Para os valores desse domínio, cancelamos o fator $x + 1$:

$$f(x) = -\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x-1}.$$

O cancelamento não devolve $x = -1$ ao domínio. Nesse ponto há uma descontinuidade removível: o limite existe, mas o valor da função não está definido:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Assim, o gráfico tem um ponto excluído em $(-1, 1/2)$. Além disso,

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

As assíntotas são $x = 1$ e $y = 0$. A função é positiva para $x < 1$, exceto em $x = -1$, e negativa para $x > 1$. Sua derivada $f'(x) = 1/(x-1)^2$ é positiva em cada intervalo do domínio.

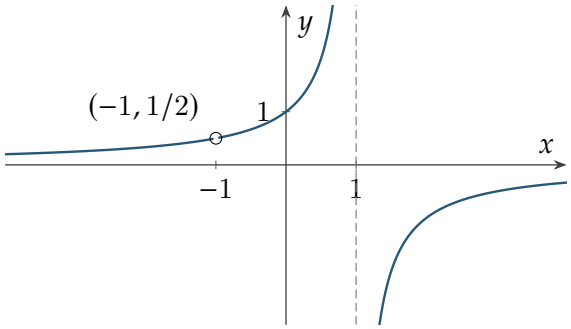


Figura 120: O círculo aberto em $(-1, 1/2)$ distingue o gráfico correto do gráfico da expressão simplificada em seu domínio natural.

Essas características identificam a alternativa (A). A alternativa (E) não registra a exclusão de $x = -1$ e, por isso, representa outra função.

Questão 3. (B)

Solução. Perto de $x = 1$, a base $\operatorname{tg}(\pi x/4)$ é positiva e tende a 1, enquanto o expoente não permanece limitado. Seja

$$u(x) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}.$$

Para $x \neq 1$ suficientemente próximo de 1, tomamos o logaritmo e reescrevemos o produto como quociente:

$$\ln u(x) = \frac{\ln\big(\operatorname{tg}(\pi x/4)\big)}{\operatorname{cotg}(\pi x/2)}.$$

Numerador e denominador tendem a zero. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x/4)\cos(\pi x/4)} = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(\pi x/2)},$$

e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg}(\pi x/2) = -\frac{\pi}{2}\csc^2(\pi x/2)$. A regra de L'Hôpital fornece, pelos dois lados,

$$\lim_{x\to 1}\ln u(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\pi/[2\operatorname{sen}(\pi x/2)]}{-\pi/[2\operatorname{sen}^2(\pi x/2)]} = \lim_{x\to 1} -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} = -1.$$

Pela continuidade da exponencial, o limite pedido é e^{-1}.

Questão 4. (E)

Solução. As interseções satisfazem $2^x = x^2$. Verificamos diretamente $x = 2$ e $x = 4$. Para mostrar que não há outras com $x \in [0, 5)$, observamos primeiro que $x = 0$ não é solução. Para $x > 0$, a equação equivale a

$$h(x) = 2\ln x - x\ln 2 = 0.$$

Temos $h'(x) = 2/x - \ln 2$, que é positivo antes de $2/\ln 2$ e negativo depois. Assim, h cresce e depois decresce, podendo ter no máximo dois zeros. Como já encontramos dois, são exatamente 2 e 4. Entre eles, $h > 0$, portanto $x^2 > 2^x$.

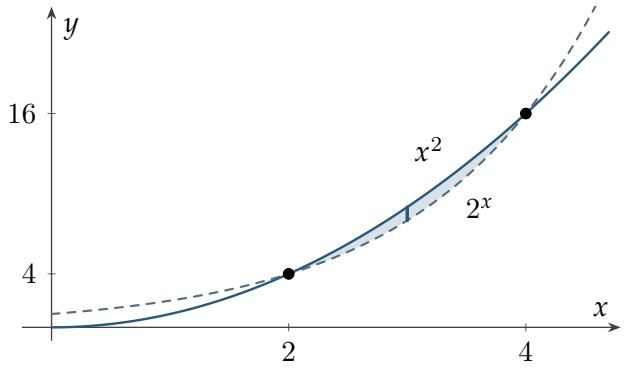


Figura 121: A região fechada fica entre $x = 2$ e $x = 4$. Ao girar, a faixa vertical produz uma coroa de raios x^2 e 2^x.

As duas funções são positivas nesse intervalo. Pelo método das coroas circulares,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^4 \left[(x^2)^2 - (2^x)^2\right] \mathrm{d}x = \pi \int_2^4 (x^4 - 4^x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4^x}{\ln 4}\right]_2^4 = \pi\left(\frac{1024 - 32}{5} - \frac{256 - 16}{2\ln 2}\right) \\ &= \pi\left(\frac{992}{5} - \frac{120}{\ln 2}\right). \end{aligned}$$

Usando $\ln 2 \approx 0{,}7$, obtemos $V \approx \pi(198{,}4 - 171{,}4286) \approx 26{,}97\pi$, correspondente a 27π. O intervalo $[0, 5)$ seleciona as interseções; ele não é o intervalo de integração da região fechada.

Questão 5. (B)

Solução. As interseções satisfazem

$$x^4 - 3x^2 = x^2 \iff x^2(x^2 - 4) = 0,$$

logo $x = -2$, $x = 0$ ou $x = 2$. No intervalo $[-2, 2]$,

$$g(x) - f(x) = x^2 - (x^4 - 3x^2) = x^2(4 - x^2) \geqslant 0.$$

Portanto, g é a curva superior nas duas regiões fechadas, que se encontram na origem.

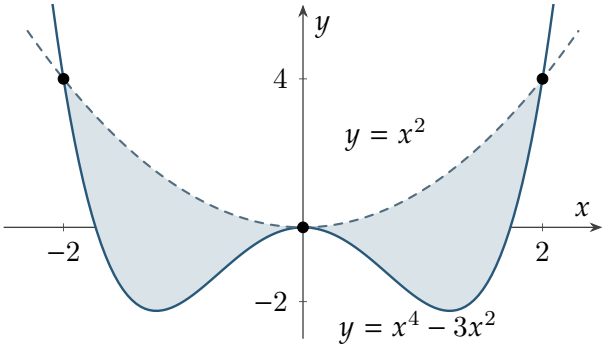


Figura 122: As duas regiões são simétricas em relação ao eixo das ordenadas e se tocam na origem.

Como a diferença é par, a área total é

$$A = \int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} (4x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 2 \cdot \frac{64}{15} = \frac{128}{15}.$$

Questão 6. (A)

Solução. Seja $S_n(x)$ a soma do enunciado, para um inteiro $n \geqslant 1$. A expressão é polinomial em x; não precisamos supor que x seja inteiro. Os primeiros casos sugerem a fatoração:

$$S_1 = 1 - x = -(x-1), \qquad S_2 = 1 - x + \frac{x(x-1)}{2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

Provaremos por indução que

$$S_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}.$$

O caso $n = 1$ já foi verificado. Supondo válida a fórmula para $n-1$, com $n \geqslant 2$, acrescentamos o último termo da soma:

$$S_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(x-1)\cdots(x-n+1)}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$
$$= \frac{(-1)^n (x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}(-n+x)$$
$$= (-1)^n \frac{(x-1)\cdots(x-n+1)(x-n)}{n!}.$$

Na segunda igualdade, usamos $n! = n(n-1)!$ e colocamos os fatores comuns em evidência. Isso completa a indução e identifica a alternativa (A), sem recorrer a uma série infinita.

Questão 7. (A)

Solução. A identidade $\operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x - 1$ separa uma parcela com primitiva trigonométrica conhecida e outra polinomial. Na primeira, derivar o fator x o elimina, e $\csc^2 x$ tem primitiva $-\operatorname{cotg} x$; isso indica a integração por partes. Usamos $\operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x - 1$, válida em todo o intervalo de integração, onde $\operatorname{sen} x > 0$. Assim,

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \csc^2 x \, \mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \, \mathrm{d}x.$$

Na primeira integral, tomamos $u = x$ e $\mathrm{d}v = \csc^2 x \, \mathrm{d}x$. Como $v = -\operatorname{cotg} x$, a integração por partes dá

$$\int x \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -x \operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = -x \operatorname{cotg} x + \ln(\operatorname{sen} x),$$

pois a substituição $t = \operatorname{sen} x$ transforma $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, \mathrm{d}x$ em $\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$, com $t > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \left[-x \operatorname{cotg} x + \ln(\operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(0 + \ln 1 - \frac{\pi^2}{8} \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} \right) \\ &= -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

Questão 8. (discursiva)

Solução. Pela identidade $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$, com $t = \arccos x$, temos

$$f(x) = 2x^2 - 1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Para tomar o recíproco, excluímos os zeros de f:

$$g(x) = \frac{1}{2x^2 - 1}, \qquad D_g = [-1, 1] \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

A restrição $[-1, 1]$ permanece, mesmo depois da simplificação. A função é par, logo seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Além disso,

$$g(-1) = g(1) = 1, \qquad g(0) = -1, \qquad g'(x) = -\frac{4x}{(2x^2 - 1)^2}.$$

A derivada é positiva quando $x < 0$ e negativa quando $x > 0$, em cada intervalo do domínio. Assim, o trecho central cresce até $(0, -1)$ e depois decresce. Nos trechos externos, o gráfico fica acima de $y = 1$ e inclui os extremos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

Escrevendo $a = 1/\sqrt{2}$, o sinal do denominador fornece os limites laterais:

x	$-a^-$	$-a^+$	a^-	a^+
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Portanto, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ são assíntotas verticais.

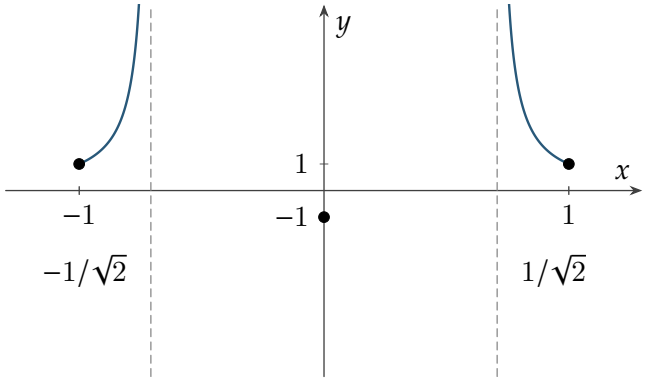


Figura 123: Gráfico restrito ao domínio original, com extremos incluídos e duas assíntotas verticais.

O conjunto de valores assumidos é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Não há intercepto no eixo x, pois o numerador é sempre 1.

Capítulo 13

EFOMM

13.1 Questões

13.1.1 Prova de 2027

Questão 1. (EFOMM 2027, questão 3) Considere, para os valores reais de x em que a expressão está definida, a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+ax} - 1 - \frac{ax}{2}}{x^2}, & x \neq 0, \\ \ln(1-b), & x = 0, \end{cases}$$

em que a e b são constantes reais. Para que a expressão esteja bem definida em um intervalo aberto contendo 0 e seja contínua em $x = 0$, assinale a alternativa correta.

A) $a \geqslant 0$, $b = 1 - e^{a^2/2}$ e $b > 1$.

B) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1 - e^{-a^2/2}$ e $b < 1$.

C) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1 - e^{a^2/8}$ e $b \leqslant 1$.

D) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1 - e^{-a^2/8}$ e $b < 1$.

E) $a \geqslant 0$, $b = 1 - e^{a^2/8}$ e $b < 1$.

Questão 2. (EFOMM 2027, questão 6) Uma indústria deseja fabricar uma lata cilíndrica sem tampa, de volume $108\pi \text{ cm}^3$. O custo por unidade de área da base é o dobro do custo por unidade de área da superfície lateral. Sejam r o raio da base e h a altura. O valor de h, em centímetros, que minimiza o custo total é:

A) $3\sqrt[3]{2}$.

B) $3\sqrt[3]{4}$.

C) $6\sqrt[3]{2}$.

D) $6\sqrt[3]{4}$.

E) $12\sqrt[3]{2}$.

Questão 3. (EFOMM 2027, questão 11) Uma embarcação A encontra-se inicialmente a 8 milhas náuticas a leste de um porto e desloca-se para norte com velocidade constante de 6 nós. No mesmo instante, uma embarcação B encontra-se a 16 milhas náuticas a oeste do porto e desloca-se para leste com velocidade constante de 2 nós. Considerando que 1 nó corresponde a 1 milha náutica por hora, determine o tempo t, em horas, para que a distância entre as embarcações seja mínima.

A) $\frac{3}{2}$.
B) $\frac{6}{5}$.
C) $\frac{5}{2}$.
D) $\frac{4}{5}$.
E) $\frac{2}{3}$.

Questão 4. (EFOMM 2027, questão 12) Um cone circular reto possui geratriz de 15 cm e altura de 9 cm. Uma esfera está inscrita nesse cone, tangenciando a base e a superfície lateral. Determine a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cone.

A) $\frac{64}{90}$.
B) $\frac{4}{9}$.
C) $\frac{27}{324}$.
D) $\frac{16}{81}$.
E) $\frac{4}{27}$.

Questão 5. (EFOMM 2027, questão 14) Um homem de altura y observa um monumento constituído de uma estátua de altura m, sobre um pilar vertical de altura H, com $H > y$. Qual distância x, do homem à base do pilar, proporciona o maior ângulo de visão θ da estátua? Considere os olhos à altura y.

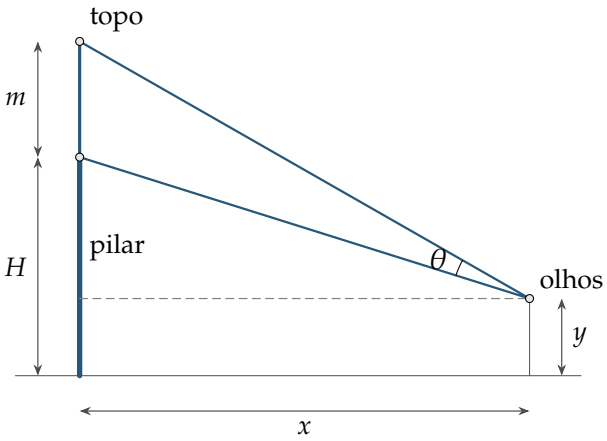


Figura 148: O ângulo de visão é formado pelas duas linhas que ligam os olhos às extremidades da estátua.

A) $m\sqrt{\dfrac{(H+y)^2-(H-y)^2}{2(H-m)^2}}$.

B) $\sqrt{(H-y)(H+m)-y^2+m^2}$.

C) $\sqrt{H^2-m^2+(h+y)^2}$.

D) $\dfrac{H+m}{4H}\sqrt{y^2+\left(\dfrac{H-y}{2}\right)^2}$.

E) $\sqrt{(H+m-y)(H-y)}$.

A alternativa (C) conserva a letra h que aparece na prova, sem definição no enunciado.

Questão 6. (EFOMM 2027, questão 17) Um recipiente cilíndrico circular reto, de raio R e altura H, está completamente cheio de água. Uma esfera de metal de raio $r < R$ é lentamente mergulhada até que seu centro coincida com o centro da base superior do cilindro. Parte da água transborda. Após a retirada da esfera, o volume de água restante é exatamente $\frac{7}{8}$ do volume original. Sendo $H = 2R$, determine $\frac{r}{R}$.

A) $\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$.

B) $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

C) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

D) $\frac{1}{2}$.

E) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Questão 7. (EFOMM 2027, questão 18) Seja F uma primitiva de x^2e^{2x} em $\mathbb{R}$. Sabendo que seu gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$, determine $F(1)$.

A) $\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$.

B) $\frac{e^2}{2} + 1$.

C) $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}$.

D) $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$.

E) $\frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$.

Questão anulada no gabarito definitivo. A resolução identifica o valor correto.

13.2 Soluções

13.2.1 Prova de 2027

Questão 1. (D)

Solução. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o radical está definido perto de zero: se $a \neq 0$, tomar $|x| < 1/(2|a|)$ garante $1 + ax > 1/2$; se $a = 0$, o radicando é igual a 1. Podemos, assim, calcular o limite local em todos esses casos. A continuidade na origem exige que o limite da expressão para $x \neq 0$ seja igual a $\ln(1 - b)$. O numerador contém uma diferença de radicais. A multiplicação pelo conjugado faz aparecer o fator x que precisamos cancelar. Para $x \neq 0$ suficientemente próximo de zero,

$$\sqrt{1 + ax} - 1 = \frac{ax}{\sqrt{1 + ax} + 1}.$$

Trocando o sinal dessa identidade, obtemos também

$$1 - \sqrt{1 + ax} = -\frac{ax}{1 + \sqrt{1 + ax}}.$$

Usaremos a primeira identidade para reunir os termos e a segunda para eliminar a diferença de radicais que restar:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + ax} - 1 - \frac{ax}{2} &= ax\left(\frac{1}{\sqrt{1 + ax} + 1} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{ax(1 - \sqrt{1 + ax})}{2(\sqrt{1 + ax} + 1)} \\ &= -\frac{a^2x^2}{2(\sqrt{1 + ax} + 1)^2}.\end{aligned}$$

Na última igualdade, substituímos a segunda identidade; os denominadores são positivos nessa vizinhança. Como $x \neq 0$, podemos cancelar x^2 e obter

$$\frac{\sqrt{1 + ax} - 1 - ax/2}{x^2} = -\frac{a^2}{2(\sqrt{1 + ax} + 1)^2} \longrightarrow -\frac{a^2}{2(1 + 1)^2} = -\frac{a^2}{8}.$$

O logaritmo é real somente quando $1 - b > 0$. A condição de continuidade é, portanto,

$$\ln(1 - b) = -\frac{a^2}{8} \iff 1 - b = e^{-a^2/8} \iff b = 1 - e^{-a^2/8}.$$

Essa escolha satisfaz $0 \leqslant b < 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$. A existência local do radical foi verificada no início, inclusive para $a = 0$, caso em que a condição acima dá $b = 0$. Assim, a condição local pedida corresponde à alternativa **(D)**.

Precisão sobre o domínio. No enunciado original da prova, a notação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é incompatível com a fórmula para $a \neq 0$, pois $1 + ax$ assume valores negativos em parte da reta. A resposta acima interpreta o pedido expresso de definição em um intervalo aberto contendo zero. Se fosse exigido domínio igual a toda a reta, teríamos necessariamente $a = 0$ e, pela continuidade, $b = 0$.

Questão 2. (C)

Solução. Seja $k > 0$ o custo por centímetro quadrado do material da lateral. O custo por centímetro quadrado da base é $2k$. Como a lata não tem tampa, sua área lateral é $2\pi rh$ e há apenas uma base de área πr^2. A restrição de volume fornece

$$\pi r^2 h = 108\pi \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{108}{r^2}, \qquad r > 0.$$

Assim, o custo em função do raio é

$$C(r) = 2k\pi r^2 + k(2\pi rh) = 2k\pi\left(r^2 + \frac{108}{r}\right).$$

Derivando e colocando em evidência os fatores que determinam o sinal,

$$C'(r) = 2k\pi\left(2r - \frac{108}{r^2}\right) = \frac{4k\pi(r^3 - 54)}{r^2}.$$

O denominador é positivo. Portanto, C decresce até $r = \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$ e cresce depois desse ponto. Esse é o único mínimo global para $r > 0$. Da igualdade $r^3 = 54$ segue que $108 = 2r^3$; logo,

$$h = \frac{108}{r^2} = \frac{2r^3}{r^2} = 2r = 6\sqrt[3]{2}\ \text{cm}.$$

A alternativa correta é **(C)**. O fator k altera o valor do custo, mas não as dimensões que o minimizam.

Questão 3. (B)

Solução. Tomemos o porto como origem, o sentido leste como positivo no eixo horizontal e o norte como positivo no vertical. Medindo t em horas e as coordenadas em milhas náuticas, temos

$$A(t) = (8, 6t), \qquad B(t) = (-16 + 2t, 0), \qquad t \geqslant 0.$$

A diferença das abscissas é $8 - (-16 + 2t) = 24 - 2t$. A separação horizontal é seu módulo, $|24 - 2t|$, e a vertical é $6t$. Assim,

$$d(t)^2 = (24 - 2t)^2 + (6t)^2 = 576 - 96t + 4t^2 + 36t^2 = 40t^2 - 96t + 576.$$

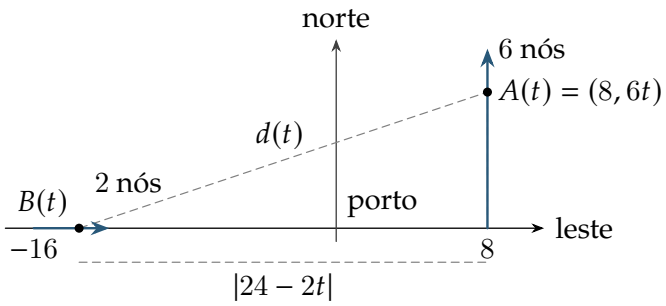


Figura 150: Para $0 < t < 12$, as separações horizontal e vertical medem $24 - 2t$ e $6t$. A hipotenusa dá a distância entre os barcos.

Como a raiz quadrada é estritamente crescente nos números não negativos, minimizar d equivale a minimizar $D = d^2$. Temos

$$D'(t) = 80t - 96 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{96}{80} = \frac{6}{5}.$$

Para $0 \leqslant t < 6/5$, a derivada é negativa; para $t > 6/5$, é positiva. Portanto, esse ponto dá o único mínimo global no domínio $t \geqslant 0$, correspondente à alternativa **(B)**. Não basta minimizar a separação horizontal: enquanto ela diminui, a separação vertical aumenta.

Questão 4. (D)

Solução. Um corte pelo eixo do cone produz um triângulo isósceles de altura 9 e lados iguais a 15. Se R é o raio da base, o teorema de Pitágoras fornece

$$R^2 + 9^2 = 15^2 \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{225 - 81} = 12 \text{ cm}.$$

Nesse corte, a esfera inscrita aparece como o círculo inscrito no triângulo, com o mesmo raio r da esfera.

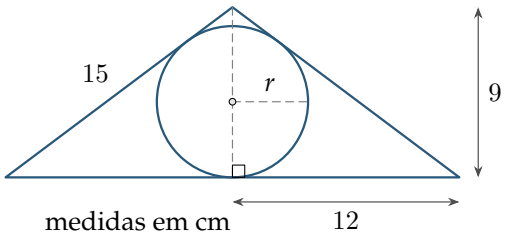


Figura 151: Corte pelo eixo: o raio da esfera é o raio do círculo inscrito no triângulo de lados 15, 15 e 24.

A área do triângulo é $\Delta = 24 \cdot 9/2 = 108$. Ligando o centro do círculo aos três vértices, decompomos o triângulo em três triângulos de altura r. Portanto,

$$\Delta = \frac{15r}{2} + \frac{15r}{2} + \frac{24r}{2} = 27r, \qquad r = \frac{108}{27} = 4 \text{ cm}.$$

A superfície esférica tem área $4\pi r^2 = 64\pi$. A área total do cone inclui a lateral e a base:

$$A_{\text{cone}} = \pi R \cdot 15 + \pi R^2 = 180\pi + 144\pi = 324\pi.$$

Consequentemente,

$$\frac{A_{\text{esfera}}}{A_{\text{cone}}} = \frac{64\pi}{324\pi} = \frac{16}{81},$$

o que corresponde à alternativa **(D)**.

Questão 5. (E)

Solução. O ângulo de visão é a diferença entre os ângulos de elevação do topo e da base da estátua. As alturas dessas extremidades acima dos olhos são, respectivamente, $H + m - y$ e $H - y$, como na Figura 148. Para simplificar a escrita, ponhamos

$$a = H - y > 0, \qquad b = H + m - y = a + m > a.$$

Para uma distância $x > 0$, obtemos

$$\theta(x) = \operatorname{arctg} \frac{b}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a}{x}.$$

Pela regra da cadeia, para uma constante $k > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctg} \frac{k}{x} = \frac{-k/x^2}{1 + k^2/x^2} = -\frac{k}{x^2 + k^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{a}{x^2 + a^2} - \frac{b}{x^2 + b^2} \\ &= \frac{a(x^2 + b^2) - b(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \\ &= \frac{(a - b)x^2 + ab(b - a)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \\ &= \frac{(b - a)(ab - x^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

O denominador e $b - a = m$ são positivos. Logo, $\theta'(x) > 0$ para $0 < x < \sqrt{ab}$ e $\theta'(x) < 0$ para $x > \sqrt{ab}$. A função cresce e depois decresce, de modo que o único máximo global ocorre em

$$\boxed{x = \sqrt{ab} = \sqrt{(H - y)(H + m - y)}}.$$

Trata-se da alternativa **(E)**. O resultado também concorda com a geometria: ao aproximar-se indefinidamente do pilar ou ao afastar-se indefinidamente, a diferença entre os dois ângulos tende a zero.

Questão 6. (B)

Solução. Como o centro da esfera fica no plano da borda superior, somente a metade inferior da esfera entra no recipiente. Essa metade cabe inteiramente no cilindro: seu raio é menor que R e sua profundidade r é menor que $H = 2R$.

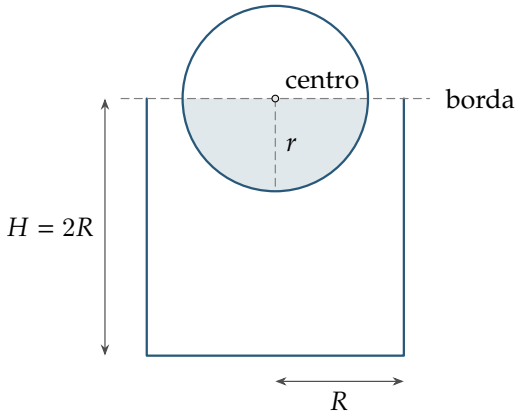


Figura 152: A região sombreada é a seção da semiesfera que desloca água. A metade superior permanece fora do recipiente.

O volume inicial de água é

$$V_0 = \pi R^2 H = 2\pi R^3.$$

Após a retirada da esfera, resta $7V_0/8$. Logo, transbordou $V_0/8$. Desprezando a água aderida à esfera, esse volume é igual ao da parte que ficou submersa, isto é, ao de uma semiesfera:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{8} \cdot 2\pi R^3.$$

Cancelando π e isolando a razão dos cubos,

$$\frac{2}{3}r^3 = \frac{1}{4}R^3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{r^3}{R^3} = \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r}{R} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

A resposta é **(B)**. Usar o volume da esfera inteira corresponderia a outra posição final da esfera.

Questão 7. (anulada)

Solução. O produto de um polinômio por uma exponencial sugere integração por partes, pois a derivação reduz o grau do polinômio. Escolhendo $u = x^2$ e $\mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x$, temos $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ e $v = e^{2x}/2$. Portanto,

$$\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Na integral restante, aplicamos o mesmo método, agora com $u = x$:

$$\int x e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Reunindo os termos e absorvendo as constantes em uma única constante, segue que

$$F(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C.$$

A passagem pelo ponto $(0, 1)$ determina a primitiva:

$$1 = F(0) = \frac{1}{4} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{3}{4}.$$

Finalmente,

$$F(1) = e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{e^2+3}{4}}.$$

Esse valor não aparece nas alternativas. A questão consta como anulada no gabarito definitivo da EFOMM 2027, prova amarela. A condição inicial deve ser aplicada à primitiva completa; omitir sua constante produz uma resposta diferente.

A.4 A propriedade dos reais usada nas provas de existência

Considere os intervalos $[1 - 1/n, 1]$, com $n \geqslant 1$. O número 1 pertence a todos eles, embora nenhum extremo esquerdo seja igual a 1. Podemos reconhecer esse ponto olhando apenas para os extremos esquerdos. Todos ficam abaixo de 1, mas, por mais próximo de 1 que se escolha um número menor que ele, algum extremo esquerdo o ultrapassa.

Um número que é maior ou igual a todos os elementos de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ chama-se *cota superior* de S. Dizemos, nesse caso, que S é *limitado superiormente*. No exemplo, tanto 2 quanto 1 são cotas superiores dos extremos esquerdos. A menor delas é 1. À menor cota superior de um conjunto, quando existe, damos o nome de *supremo* e escrevemos $\sup S$.

Pela completude dos reais, todo conjunto não vazio e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$. Aqui tomaremos essa propriedade como ponto de partida para as provas de existência. O Apêndice C mostra como ela decorre da construção dos reais por cortes de racionais.

A.4.1 Intervalos fechados encaixados

Lema dos intervalos fechados encaixados

Considere intervalos não vazios $I_n = [a_n, b_n]$ tais que $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $b_n - a_n \to 0$. Existe exatamente um ponto comum a todos eles.

Demonstração. Um ponto comum deve ser maior ou igual a cada extremo esquerdo e menor ou igual a cada extremo direito. O supremo dos extremos esquerdos satisfaz a primeira exigência. O encaixe dos intervalos permitirá verificar a segunda.

Os extremos esquerdos formam um conjunto não vazio limitado superiormente por b_1. Pela completude dos reais, podemos definir

$$c = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

Pela definição de supremo, $a_n \leqslant c$ para todo n. Fixemos n e comparemos b_n com cada extremo esquerdo a_k. Se $k \geqslant n$, temos $I_k \subseteq I_n$, logo $a_k \leqslant b_n$. Se $k < n$, temos $a_k \leqslant a_n \leqslant b_n$. Assim, b_n é uma cota superior dos extremos esquerdos. Como c é a menor delas, obtemos

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad \text{para todo } n.$$

Assim, c pertence a todos os intervalos. Para a unicidade, usamos agora a hipótese de que os comprimentos tendem a zero: dois pontos distintos teriam uma distância positiva que não caberia em todos esses intervalos. Formalmente, se outro ponto d também pertencesse a todos, teríamos $|c - d| \leqslant b_n - a_n$ para todo n. Como os comprimentos tendem a zero, $|c - d| = 0$; portanto, $d = c$. □

A.4.2 Selecionar pontos que convergem

Teorema de Bolzano-Weierstrass em um intervalo fechado

De qualquer sequência (x_n) de pontos de um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, podemos selecionar termos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, com $n_1 < n_2 < \cdots$, que convergem para algum $c \in [a, b]$.

Essa seleção de termos, preservando a ordem dos índices, é chamada *subsequência*. O enunciado acima é a forma do teorema de Bolzano-Weierstrass de que precisamos aqui.

Demonstração. Para obter convergência, procuramos termos dentro de intervalos cada vez menores. Mas precisamos poder escolher um novo índice a cada etapa; por isso, conservaremos sempre um intervalo que contenha termos de infinitos índices. Os valores desses termos podem até se repetir.

Se $a = b$, todos os termos já são iguais a a. Suponha $a < b$ e divida $[a, b]$ em duas metades fechadas. Pelo menos uma contém termos de infinitos índices da sequência; caso contrário, a união conteria apenas finitos índices. Escolha essa metade e repita a construção. Obtemos intervalos encaixados I_k, cada um contendo infinitos termos, de comprimentos $(b - a)/2^k$.

Pelo resultado anterior, há um único c comum a todos os I_k. Falta escolher os termos na ordem original da sequência; selecionar pontos sem controlar seus índices não bastaria para construir uma subsequência. Escolha n_1 com $x_{n_1} \in I_1$. Depois de escolher n_{k-1}, escolha $n_k > n_{k-1}$ com $x_{n_k} \in I_k$; isso é possível porque há infinitos índices nesse intervalo. Como x_{n_k} e c estão em I_k,

$$|x_{n_k} - c| \leqslant \frac{b - a}{2^k} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. □

Se f é contínua em c e $z_k \to c$, com z_k no domínio de f, então $f(z_k) \to f(c)$. De fato, para cada tolerância ε, a continuidade fornece uma distância δ; a convergência de z_k garante que, a partir de certo índice, $|z_k - c| < \delta$, e daí $|f(z_k) - f(c)| < \varepsilon$. Usaremos essa consequência nas duas provas seguintes e na justificativa da integrabilidade de funções contínuas.

A.5 Teorema do Valor Intermediário

Teorema 1.4 (Valor Intermediário)

Se f é contínua em $[a, b]$ e N está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = N$. Em particular, se $f(a)f(b) < 0$, então f tem ao menos uma raiz em (a, b).

Uma função contínua em um intervalo fechado não salta os valores entre as imagens dos extremos. Para localizar o ponto de imagem N, manteremos um extremo com imagem menor que N e outro com imagem maior. Dividir o intervalo ao meio preservará essa situação em uma das metades e fará seu comprimento tender a zero. O lema dos intervalos encaixados fornecerá o ponto; a continuidade permitirá identificar sua imagem.

Demonstração. Se $N = f(a)$ ou $N = f(b)$, basta escolher o extremo correspondente. Considere agora $f(a) < N < f(b)$. No ponto médio $m = (a + b)/2$, há três possibilidades. Se $f(m) = N$, encontramos o ponto procurado. Se $f(m) < N$, conservamos $[m, b]$, pois $f(m) < N < f(b)$. Se $f(m) > N$, conservamos $[a, m]$, pois $f(a) < N < f(m)$. Em ambos os casos, N permanece entre as imagens dos extremos, sem que seja necessário supor monotonicidade de f.

Repetindo o procedimento, ou encontramos um ponto com imagem N em alguma etapa, ou obtemos intervalos fechados encaixados $[a_n, b_n]$ tais que

$$f(a_n) < N < f(b_n), \qquad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

No segundo caso, a Seção A.4.1 fornece um ponto c comum a todos eles. As desigualdades

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n, \qquad 0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n$$

mostram que $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Pela continuidade,

$$f(a_n) \to f(c), \qquad f(b_n) \to f(c).$$

Passando ao limite nas desigualdades que cercam N, obtemos $f(c) \leqslant N \leqslant f(c)$. Logo $f(c) = N$.

Se $f(a) > N > f(b)$, aplicamos o caso anterior à função $-f$ e ao valor $-N$. Isso cobre todas as possibilidades. Em particular, quando $f(a)f(b) < 0$, escolhemos $N = 0$. A raiz obtida está em (a, b), pois os valores nos extremos são diferentes de zero. □

Apêndice B

Somas de potências e somas de Riemann

Uma soma com muitas parcelas nem sempre exige muitas contas. Podemos combinar parcelas, produzir cancelamentos ou encontrar uma expressão cuja diferença entre valores consecutivos seja o termo que queremos somar. Esses métodos explicam fórmulas como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e preparam o cálculo de integrais pela definição. O objetivo deste apêndice é aprender a construir e usar essas fórmulas, em vez de apenas memorizá-las.

As primeiras seções pressupõem apenas conhecimentos de álgebra. A Seção B.7 aplica os resultados a limites e integrais. Ao longo do apêndice, n é o número de parcelas e p é o expoente: manter letras diferentes evita confundir o crescimento da quantidade de termos com a potência de cada termo.

B.1 Ler e reorganizar uma soma

Para um inteiro $n \geqslant 1$ e um inteiro $p \geqslant 0$, escrevemos

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

O índice k percorre os inteiros de 1 a n; o expoente p permanece fixo. Em particular, $S_0(n) = n$, pois há n parcelas iguais a 1. Também adotamos $S_p(0) = 0$, a soma sem parcelas.

Exemplo B.1. *Separar as parcelas antes de somar.*

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+2)$ e escreva a mesma soma, com n parcelas, em termos de $S_1(n)$.

Solução. Substituímos o índice pelos quatro valores indicados:

$$\sum_{k=1}^{4}(3k+2) = 5 + 8 + 11 + 14 = 38.$$

Podemos obter o mesmo resultado agrupando os termos de cada tipo:

$$3(1+2+3+4) + (2+2+2+2) = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 38.$$

Com n parcelas, o termo constante também aparece n vezes. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_1(n) + 2n.$$

Essa é a linearidade das somas finitas: podemos separar adições e retirar fatores que não dependem do índice. Não podemos, por exemplo, trocar $\sum k^2$ por $(\sum k)^2$: para duas parcelas, $1^2 + 2^2 = 5$, enquanto $(1+2)^2 = 9$.

B.2 Pareamento: a soma dos inteiros

Exemplo B.2. *De uma conta concreta à fórmula geral.*

Calcule $1 + 2 + \cdots + 100$ e deduza uma expressão para $S_1(n)$.

Solução. A primeira parcela com a última dá 101; a segunda com a penúltima também. Há 50 pares, portanto a soma é $50 \cdot 101 = 5050$.

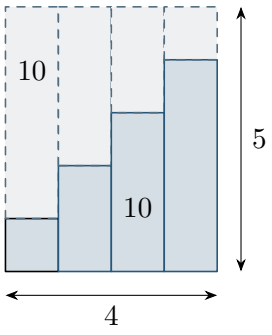
Para tratar um número de parcelas que pode ser par ou ímpar, escrevemos duas cópias da mesma soma, em ordens opostas:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n,$$
$$S_1(n) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Ao somar por colunas, obtemos n parcelas iguais a $n+1$. Como usamos duas cópias,

$$2S_1(n) = n(n+1), \qquad \boxed{S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Não foi necessário separar casos de paridade: mesmo quando n é ímpar, cada coluna das duas linhas soma $n+1$.



Para $n = 4$, duas escadas de áreas $1 + 2 + 3 + 4$ formam um retângulo de base 4 e altura 5.

Na soma do exemplo anterior, a fórmula fornece

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2) = \frac{3n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(3n+7)}{2}.$$

Para $n = 4$, resulta $4 \cdot 19/2 = 38$, como já havíamos calculado diretamente.

B.3 Somas telescópicas: deixar os termos se cancelarem

Uma *soma telescópica* é uma soma em que termos de sinais opostos se cancelam entre parcelas diferentes. A forma básica é

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_0.\end{aligned}$$

A escolha útil é aquela em que $a_k - a_{k-1}$ se parece com a parcela que queremos somar.

Exemplo B.3. *Por que a soma dos ímpares é um quadrado.*

Calcule $1 + 3 + \cdots + 19$ e deduza a soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares.

Solução. O k-ésimo ímpar é $2k - 1$. Essa expressão aparece na diferença de dois quadrados consecutivos:

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1.$$

Somamos essa identidade para $k = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \cdots + (n^2 - (n-1)^2) \\ &= n^2.\end{aligned}$$

Como $19 = 2 \cdot 10 - 1$, a soma pedida contém dez ímpares e vale $10^2 = 100$. Outro caminho seria a linearidade: $2S_1(n) - n = n(n+1) - n = n^2$.

Exemplo B.4. *Soma dos quadrados por diferenças de cubos.*

Determine $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ e calcule $S_2(10)$.

Solução. Uma diferença de cubos produz um termo quadrático. Escolhemos

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

porque, ao somar, o lado esquerdo se cancela e o direito contém a soma procurada e somas que já conhecemos. De fato,

$$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3) = (n+1)^3 - 1.$$

No lado direito, a soma dos termos $3k^2$ é $3S_2(n)$, a dos termos $3k$ é $3S_1(n)$, e a dos termos constantes é n. Portanto,

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n.$$

Substituímos a fórmula dos inteiros e isolamos $S_2(n)$:

$$\begin{aligned} 3S_2(n) &= n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dividindo por 3, obtemos

$$\boxed{S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Assim, $S_2(10) = 10 \cdot 11 \cdot 21/6 = 385$.

Verificar uma fórmula por indução

A conta anterior descobriu a fórmula. A indução oferece outra maneira de verificá-la: conferimos o primeiro caso e mostramos que a validade em um inteiro implica a validade no seguinte. Esse encadeamento alcança todos os inteiros positivos.

Para $n = 1$, a fórmula dos quadrados dá $1 \cdot 2 \cdot 3/6 = 1$. Suponha agora que ela valha para certo inteiro $n \geqslant 1$. Acrescentar a parcela seguinte fornece

$$\begin{aligned} S_2(n+1) &= S_2(n) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

A última expressão é exatamente a fórmula proposta com $n+1$ no lugar de n. Isso completa a verificação. Testar apenas alguns valores numéricos não substituiria esse argumento.

Exemplo B.5. *Soma dos cubos por uma diferença bem escolhida.*

Determine $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ e calcule a soma dos cinco primeiros cubos.

Solução. Os números $T_k = k(k+1)/2$ são as somas dos k primeiros inteiros. Tomando $T_0 = 0$, temos

$$T_k - T_{k-1} = k, \qquad T_k + T_{k-1} = \frac{k(k+1) + k(k-1)}{2} = k^2.$$

Multiplicar essas identidades produz justamente k^3:

$$T_k^2 - T_{k-1}^2 = (T_k - T_{k-1})(T_k + T_{k-1}) = k \cdot k^2 = k^3.$$

Agora somamos. Os quadrados intermediários se cancelam:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= (T_1^2 - T_0^2) + (T_2^2 - T_1^2) + \cdots + (T_n^2 - T_{n-1}^2) \\ &= T_n^2 - T_0^2 = \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Para $n = 5$, obtemos $(5 \cdot 6/2)^2 = 15^2 = 225$. A verificação direta é $1+8+27+64+125 = 225$. A igualdade entre a soma dos cubos e o quadrado da soma dos inteiros é uma identidade especial; não autoriza elevar somatórios a potências termo a termo.

Apêndice C

Números reais: ordem, completude e construção

Ao trabalhar com limites, usamos números que podem não ter uma expressão racional. Para resolver $x^2 = 2$, por exemplo, frações cada vez melhores fornecem aproximações, mas nenhuma delas é a solução exata. Há duas questões distintas: quais propriedades permitem trabalhar com esse número e como construir um sistema em que ele exista.

Nas primeiras seções, usamos os reais como um corpo ordenado completo e explicamos essas palavras por meio de problemas. A Seção C.6 retoma o assunto a partir dos racionais e constrói tal sistema. Sua demonstração não depende dos limites, derivadas ou integrais estudados no livro, nem dos resultados que serão obtidos aqui a partir da completude.

C.1 Uma equação que os racionais não resolvem

Os racionais são quocientes de inteiros com denominador não nulo. Permitem somar, subtrair, multiplicar e dividir por elementos não nulos, mantendo as regras algébricas usuais. Um conjunto numérico com essas operações e regras é chamado **corpo**. Quando possui uma ordem total compatível com a adição e com a multiplicação de positivos, dizemos que é um **corpo ordenado**. Tanto os racionais quanto os reais têm essa estrutura; a diferença que interessa ao Cálculo está na completude.

Exemplo C.1.

Prove que não existe racional cujo quadrado seja 2.

Solução. Se existisse, seu valor absoluto também teria quadrado 2, e poderíamos escrevê-lo como p/q, com p, q inteiros positivos sem divisor comum maior que 1. A igualdade $p^2 = 2q^2$ tornaria p^2 par. Como o quadrado de um ímpar é ímpar, p seria par: $p = 2k$. Substituindo,

$$4k^2 = 2q^2, \qquad q^2 = 2k^2.$$

Então q também seria par. Isso contradiz a escolha da fração sem fatores comuns. A equação tem solução positiva em $\mathbb{R}$, mas não em $\mathbb{Q}$.

Encontrar $1{,}4$, $1{,}41$, $1{,}414$ e outras aproximações não elimina a dificuldade: cada decimal finito continua sendo racional. Precisamos de uma propriedade que assegure a existência de um número determinado por todas essas aproximações.

C.2 Supremo, ínfimo e completude

Todo número de $(0, 1)$ é menor que 2. Dizemos que 2 é uma **cota superior** do intervalo. O número 1 também serve e é a menor escolha possível. Do outro lado, tanto -1 quanto 0 são **cotas inferiores**, pois são menores ou iguais a cada elemento do intervalo. A maior delas é 0.

Definição C.1.

Uma **cota superior** de $S \subseteq \mathbb{R}$ é um número b tal que $x \leqslant b$ para todo $x \in S$. Uma **cota inferior** é um número a tal que $a \leqslant x$ para todo $x \in S$. Para S não vazio, a menor cota superior, quando existe, é o **supremo** $\sup S$. A maior cota inferior, quando existe, é o **ínfimo** $\inf S$.

Para provar que $s = \sup S$, mostramos que todos os elementos de S são menores ou iguais a s e que qualquer número menor que s é ultrapassado por algum elemento de S. Escrevendo esse número como $s - \varepsilon$, a segunda condição diz que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in S$ com $s - \varepsilon < x \leqslant s$. Se s pertence a S, ele é o **máximo** de S. Do mesmo modo, quando o ínfimo pertence ao conjunto, ele é o **mínimo**.

Exemplo C.2.

Determine o supremo e o ínfimo de $S = \{1 - 1/n : n \geqslant 1\}$ e verifique se algum termo atinge esses valores. Compare com $(0, 1)$, $[0, 1]$ e $[0, 1)$.

Solução. Todos os termos de S pertencem a $[0, 1)$, e o primeiro é 0. Logo 0 é mínimo e ínfimo. Para verificar que 1 é o supremo, tome $b < 1$ e escolha um inteiro $n > 1/(1 - b)$. Então $1/n < 1 - b$, donde $1 - 1/n > b$. Assim, todo número menor que 1 é ultrapassado por algum termo. Como nenhum termo vale 1, não há máximo.

Os três intervalos também têm ínfimo 0 e supremo 1. Em $(0, 1)$, nenhum desses valores é atingido. Em $[0, 1]$, ambos são atingidos. Já em $[0, 1)$, o 0 é mínimo e o 1 fica fora do intervalo, que por isso não tem máximo.

A **completude dos reais** afirma que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ possui supremo em $\mathbb{R}$. Aplicando a propriedade a $-S = \{-x : x \in S\}$, obtemos a existência do ínfimo para conjuntos não vazios limitados inferiormente, pois $\inf S = -\sup(-S)$.

Exemplo C.3.

Se $S \neq \varnothing$ é limitado, com $\inf S = m$ e $\sup S = M$, determine o ínfimo e o supremo de $T = \{5 - 2s : s \in S\}$.

Solução. De $m \leqslant s \leqslant M$, a multiplicação pelo número negativo -2 inverte as desigualdades:

$$5 - 2M \leqslant 5 - 2s \leqslant 5 - 2m.$$

Para verificar que $5 - 2m$ é o supremo, falta mostrar que algum elemento de T ultrapassa $5 - 2m - \varepsilon$, por menor que seja $\varepsilon > 0$. Como $m = \inf S$, podemos escolher $s \in S$ com $m \leqslant s < m + \varepsilon/2$. Então

$$5 - 2s > 5 - 2m - \varepsilon.$$

Logo $\sup T = 5-2m$. Escolher $s > M-\varepsilon/2$ prova, de modo análogo, que $\inf T = 5-2M$. O supremo de T é atingido exatamente quando S tem mínimo; seu ínfimo é atingido exatamente quando S tem máximo.

C.3 Inteiros grandes e racionais entre reais

A propriedade **arquimediana** diz que, dado qualquer número real, existe um natural maior que ele. Para deduzi-la da completude, suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente e tome $s = \sup \mathbb{N}$. Como $s - 1 < s$, algum natural n satisfaz $n > s - 1$. Mas $n + 1$ também é natural e $n+1 > s$, o que contradiz a definição de s. Em particular, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $n > 1/\varepsilon$ e assim obter $1/n < \varepsilon$.

Se $a < b$, escolha um inteiro positivo n com $n(b - a) > 1$. Existe um inteiro m tal que $na < m \leqslant na + 1$: podemos tomar o primeiro inteiro estritamente maior que na, cuja existência segue da propriedade arquimediana e da boa ordenação dos naturais, após um deslocamento por um inteiro. Então

$$na < m \leqslant na + 1 < nb, \qquad a < \frac{m}{n} < b.$$

Assim, há um racional entre quaisquer dois reais distintos. Essa propriedade é chamada **densidade dos racionais**. Ela não implica completude: um conjunto pode possuir elementos em todos os intervalos e ainda deixar de conter limites de suas sequências.

C.4 Existência de raízes pelo supremo

Seja $a > 0$. O conjunto $S = \{x \geqslant 0 : x^2 \leqslant a\}$ contém 0 e é limitado superiormente por $a+1$. Seja $s = \sup S$. Há um elemento positivo em S, por exemplo $a/(a+1)$, pois $a^2/(a+1)^2 < a$; portanto $s > 0$.

Se $s^2 < a$, escolha

$$0 < h < \min\left\{1, \frac{a - s^2}{2s + 1}\right\}.$$

Então $(s+h)^2 - s^2 = h(2s+h) < a - s^2$. Teríamos $s + h \in S$, embora $s + h$ seja maior que o supremo de S. Se $s^2 > a$, escolha

$$0 < h < \min\left\{s, \frac{s^2 - a}{2s}\right\}.$$

Nesse caso, $(s-h)^2 > s^2 - 2sh > a$. Todo $x \in S$ satisfaz $x < s - h$, pois $x^2 \leqslant a$ e ambos os números são não negativos. Assim, até $s - h$ seria uma cota superior de S, embora seja menor que o supremo s. Resta $s^2 = a$.

A raiz positiva é única, porque $u^2 = v^2$, com $u, v > 0$, implica $(u - v)(u + v) = 0$ e, portanto, $u = v$. A prova usou apenas ordem, operações e supremo; não pressupôs continuidade de uma função raiz ainda por construir. Para raízes de ordem inteira maior, o mesmo argumento utiliza a fatoração $u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + \cdots + v^{k-1})$.

Exemplo C.4.

Mostre por que uma mudança de sinal e um domínio racional fechado e limitado não garantem, por si sós, os teoremas de existência usados no Cálculo.

Solução. Em $D = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$, a função $f(q) = q^2 - 2$ tem $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$, mas nenhum zero em D. O Teorema do Valor Intermediário exige um intervalo real inteiro; D não contém o ponto real $\sqrt{2}$.

No mesmo domínio, $g(q) = 1/(q^2 - 2)^2$ está definida e é contínua como função de uma variável racional, mas não é limitada. Pela densidade, podemos escolher racionais $q_n \in D$ com $|q_n - \sqrt{2}| < 1/n$. Como $q_n + \sqrt{2} < 4$,

$$0 < |q_n^2 - 2| < \frac{4}{n}, \qquad g(q_n) > \frac{n^2}{16}.$$

Logo g não tem máximo. O conjunto D é fechado dentro de $\mathbb{Q}$, mas não é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. É essa troca de domínio que impede aplicar o teorema dos extremos.

Exemplo C.5.

Prove que há também um irracional entre quaisquer dois reais $a < b$.

Solução. Pela densidade dos racionais, existe $r \in \mathbb{Q}$ entre $a - \sqrt{2}$ e $b - \sqrt{2}$. Portanto $a < r + \sqrt{2} < b$. Se $r + \sqrt{2}$ fosse racional, subtrair r tornaria $\sqrt{2}$ racional, contradizendo o Exemplo C.1. Assim, tanto racionais quanto irracionais aparecem em todo intervalo aberto não vazio.

C.5 O que uma expansão decimal representa

Para $x \geqslant 0$ e cada n, existe um inteiro k_n tal que $k_n \leqslant 10^n x < k_n + 1$. O decimal truncado $d_n = k_n/10^n$ satisfaz

$$0 \leqslant x - d_n < 10^{-n}.$$

Logo os decimais finitos determinam x com precisão arbitrária. Reciprocamente, uma lista de dígitos após uma parte inteira fixa produz truncamentos crescentes e limitados pela parte inteira mais 1; seu supremo é o número representado. A expansão infinita é definida por esse limite, não por um último dígito.

Exemplo C.6.

Justifique a igualdade $0{,}999\ldots = 1$.

Solução. O truncamento com n noves é

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 - 10^{-n},$$

pela fórmula de uma soma geométrica finita. Assim, $1 - d_n = 10^{-n} \to 0$. Por definição da expansão, $0{,}999\ldots = \lim d_n = 1$. Não existe uma diferença positiva "depois de todos os noves": qualquer diferença positiva seria maior que 10^{-n} para algum n. A representação decimal pode não ser única, mas o número representado é.

C.6 Construir os reais a partir dos racionais

A partir desta seção, os objetos numéricos de partida são apenas os racionais, com sua ordem e suas operações. Em particular, não usaremos um real ainda não construído para definir o conjunto dos racionais que ficam abaixo dele.

Um racional r pode ser identificado por todos os racionais menores que ele. Esse conjunto registra uma posição na ordem sem precisar conter um elemento de fronteira. A mesma descrição permite representar uma posição que não corresponde a racional algum. Para que o conjunto se comporte como uma parte inferior da reta, exigimos que ele não seja vazio nem ocupe todos os racionais, que contenha os menores que seus elementos e que não tenha um maior elemento.

Definição C.2. *Corte de Dedekind.*

Um **corte** é um conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ com as propriedades:

1. $A \neq \varnothing$ e $A \neq \mathbb{Q}$;
2. se $r \in A$ e $q < r$, então $q \in A$;
3. para todo $r \in A$, existe $s \in A$ com $r < s$.

Denotamos por $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os cortes. Para $r \in \mathbb{Q}$, escrevemos $r^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.

Cada r^* é um corte: contém $r - 1$, não contém r, é fechado para baixo e, se $q < r$, o racional $(q + r)/2$ fica entre eles. A exigência de não ter maior elemento escolhe uma convenção única: representamos r por $q < r$, e não também por $q \leqslant r$.

Exemplo C.7.

Verifique que

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ou } (q \geqslant 0 \text{ e } q^2 < 2)\}$$

é um corte que não é igual a r^* para nenhum racional r.

Solução. O conjunto contém 0, mas não contém 2. Se $q \in A$ e $p < q$, então $p < 0$ ou $0 \leqslant p < q$ com $p^2 < q^2 < 2$; em ambos os casos, $p \in A$.

Se $q < 0$, o número $q/2$ é um elemento maior de A; se $q = 0$, podemos usar 1. Para $q > 0$ em A, escolha um racional

$$0 < h < \min\left\{1, \frac{2 - q^2}{2q + 1}\right\}.$$

Então $(q + h)^2 < 2$, e $q + h \in A$. Assim, não há maior elemento.

Se $A = r^*$, teríamos $r > 0$, pois $0 \in A$. Se $r^2 < 2$, o próprio r pertenceria a A, mas não a r^*. Se $r^2 > 2$, poderíamos escolher racional h com $0 < h < \min\{r, (r^2 - 2)/(2r)\}$; então $(r - h)^2 > 2$, embora $r - h < r$. Novamente os conjuntos seriam diferentes. Resta

a possibilidade $r^2 = 2$, excluída pela prova de irracionalidade. A definição do corte usou somente comparações e operações racionais.

C.6.1 A ordem e as aproximações racionais

Definimos $A \leqslant B$ quando $A \subseteq B$. A igualdade $A = B$ é permitida. Escrevemos $A < B$ quando a inclusão é estrita, ou seja, quando $A \subsetneq B$. Essa ordem é total. De fato, se $A \not\subseteq B$, existe $a \in A \setminus B$. Todo $b \in B$ é menor que a, pois $b \geqslant a$ obrigaria $a \in B$. Logo $B \subsetneq A$. A inclusão também dá reflexividade, antissimetria e transitividade.

A aplicação $r \mapsto r^*$ preserva e distingue a ordem: $r < s$ implica $r^* \subsetneq s^*$, pois $r \in s^* \setminus r^*$. Assim, os racionais estão representados dentro de $\mathcal{R}$. Usaremos 0^* e 1^* para os cortes correspondentes a zero e um.

Precisaremos de uma aproximação que não invoque limites reais.

Lema C.1. *Intervalos racionais para um corte.*

Dados um corte A, um racional $u \in A$ e um racional $\delta > 0$, existem $a \in A$ e $b \notin A$ tais que $a \geqslant u$ e $0 < b - a \leqslant \delta$.

Demonstração. Escolha $v \notin A$. Os racionais $u + k\delta$ ultrapassam v para algum inteiro k; isso usa apenas a propriedade arquimediana dos racionais, obtida da ordem dos inteiros. Tome o menor inteiro positivo k com $u + k\delta \notin A$. Então $a = u + (k-1)\delta \in A$ e $b = u + k\delta \notin A$ satisfazem o enunciado. □

Se $a \in A$ e $b \notin A$, todos os elementos de A são menores que b, e temos $a^* < A \leqslant b^*$. Cortes distintos podem ser separados por um corte racional: se $A < B$, escolha $r \in B \setminus A$ e depois $s \in B$ com $s > r$. Um racional t entre r e s satisfaz $A < t^* < B$. Essa separação será útil para interpretar as aproximações.